Раздел 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятности – раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений, событий.

1.1. Случайные события и их виды

Событием называют всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. *Событие*, исход которого заранее не определён, называют случайным. *Достоверное событие* – такое событие, которое в результате опыта обязательно произойдёт. *Невозможное событие* – такое событие, которое в данном опыте произойти не может.

Несовместными считают события, которые не могут одновременно произойти в одном опыте. В противном случае события считают совместными. Например, несовместными являются такие события как безотказная работа и отказ РЭУ в течение заданного времени. Совместными событиями являются безотказная работа в течение заданного времени t двух устройств.

Независимыми являются такие события, для которых появление одного из них никак не связано с появлением другого. Два события считают независимыми, если вероятность одного из них не зависит от появления или непоявления другого.

Под полной группой несовместных событий понимают такую группу событий, в которой одно из событий обязательно появится в опыте. Например, безотказная работа полупроводникового диода, его отказ типа «обрыв» и отказ типа «короткое замыкание» составляют полную группу несовместных событий (в предположении, что отказы диодов проявляются только в виде обрыва или короткого замыкания).

Противоположными событиями называют два несовместных события, образующих полную группу событий. Событие, противоположное событию A, принято обозначать $\overline{A}$. Примеры противоположных событий: безотказная работа и отказ РЭУ, отказ диода по типу «короткое замыкание» и неотказ по типу «короткое замыкание» (т. е. что-то отличное от отказа типа «короткое замыкание», в частности – безотказная работа или отказ по типу «обрыв» в случае, если безотказная работа, отказ типа «обрыв» и отказ типа «короткое замыкание» составляют полную группу несовместных событий). Следует помнить, что с понятием «противоположные события» во всех случаях связано только два события.

1.2. Понятие вероятности события

Под *вероятностью события* понимают число, принимающее значения в диапазоне 0…1 и характеризующее возможность осуществления события, причём для достоверного события вероятность считают равной единице, а для невозможного – нулю. Обозначается вероятность как $P(A)$, где A – рассматриваемое событие.

1.3. Оценка вероятности события по результатам опыта

Вероятность события A *оценивается по относительной доле благоприятных случаев* как

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

где n – общее число исходов эксперимента (случаев);
m – число исходов, благоприятствующих событию A.

Эта формула пригодна тогда, когда опыт сводится к схеме случаев, т.е. когда исходы опыта являются равновозможными.

1.4. Сумма и произведение событий

Поясним операции над событиями на примере двух событий. ***Суммой двух событий A и B*** называется третье событие C, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A и B. Записывают это как

$$C = A + B.$$

Пример суммы двух событий: отказ электрической цепи, состоящей из двух последовательно соединённых элементов.

Произведением событий A и B называется третье событие C, состоящее в одновременном появлении событий A и B. Записывают это как

$$C = A\ B.$$

Пример произведения двух событий: безотказная работа цепи, состоящей из двух последовательно соединённых элементов.

Операции над событиями распространяются на любое число событий.

1.5. Вероятность суммы событий (теорема сложения вероятностей)

1.5.1. Вероятность суммы несовместных событий

Вероятность суммы двух несовместных событий A и B выражается формулой

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{1.2}$$

<u>Следствие 1.</u> Для событий A_1, A_2, ..., A_n, образующих полную группу несовместных событий

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1. \tag{1.3}$$

<u>Следствие 2.</u> Сумма вероятностей противоположных событий равна единице

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{1.4}$$

Следует знать, что теорема сложения вероятностей применима для любого числа несовместных событий. В этом случае её можно записать в виде:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \tag{1.5}$$

где n – число рассматриваемых несовместных событий.

1.5.2. Вероятность суммы совместных событий

Вероятность суммы совместных событий A и B выражается формулой

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB), \tag{1.6}$$

где $P(AB)$ – вероятность произведения событий A и B.

Для трёх и более совместных событий формулы принимают более громоздкий вид. С ними можно ознакомиться в [1, с. 44].

1.6. Вероятность произведения событий (теорема умножения вероятностей)

Теорема умножения вероятностей выражается формулой

$$P(AB) = P(A)P(B|A), \tag{1.7}$$

где $P(B|A)$ – условная вероятность события B: вероятность события B, найденная при условии, что произошло событие A.

Теорема умножения вероятностей может быть распространена на произвольное число зависимых событий [1, с. 48].

В случае независимых событий теорема упрощается и принимает вид

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i), \tag{1.8}$$

где n – число рассматриваемых событий.

1.7. Формула полной вероятности

Применяется для определения вероятности события A, которое может произойти вместе с одним из событий H_1, H_2, …, H_n, образующих полную группу несовместных событий, называемых обычно гипотезами. $P(A)$ вычисляется по известным вероятностям гипотез и условным вероятностям вида $P(A|H_i)$:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i). \tag{1.9}$$

1.8. Формула Байеса (теорема гипотез)

Она позволяет определить условные вероятности гипотез (их изменение) после осуществления события A и имеет вид

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}. \tag{1.10}$$

Примером применения формулы Байеса является определение класса рассматриваемого элемента (с точки зрения его надёжности) после того, как путём измерения установлена область, в которой находится значение информативного параметра у этого элемента (экземпляра).

1.9. Решение задача с использованием теорем и формул теории вероятностей

Для осмысливания теорем сложения и умножения вероятностей, а также формулы полной вероятности рекомендуется разобраться с решением следующей задачи.

Задача. Для защиты конфиденциальной информации фирмы используется РЭУ, имеющее три датчика, которые воспринимают сигнал о несанкционированном проникновении независимо друг от друга. Вероятность пропуска сигнала первым датчиком составляет 0,1, вторым – 0,2, третьим – 0,3. При восприятии сигнала тремя датчиками задача, возлагаемая на РЭУ, решается во всех случаях. Если сигнал воспринят любыми двумя датчиками, то задача решается в 85-ти процентах случаев. При восприятии сигнала любым одним датчиком задача решается в 70-ти процентах случаев. Если сигнал не воспринят всеми тремя датчиками, то задача не может быть решена. Требуется определить вероятность того, что задача, возлагаемая на РЭУ, будет решена.

Решение. Обозначим:

A – событие, состоящее в том, что задача, возлагаемая на РЭУ, будет решена.

Рассмотрим следующие гипотезы (события):

H_0 – сигнал не воспринят ни одним датчиком;
H_1 – сигнал воспринят одним датчиком;
H_2 – сигнал воспринят двумя датчиками;
H_3 – сигнал воспринят тремя датчиками.

Обозначим: B_1 – событие, состоящее в том, что сигнал воспринят первым датчиком;

B_2 – событие, состоящее в том, что сигнал воспринят вторым датчиком;

B_3 – событие, состоящее в том, что сигнал воспринят третьим датчиком.

Следовательно, $\overline{B_1}$ – событие, состоящее в том, что сигнал не воспринят первым датчиком (событие, противоположное событию B_1);

$\overline{B_2}$ – событие, состоящее в том, что сигнал не воспринят вторым датчиком;

$\overline{B_3}$ – событие, состоящее в том, что сигнал не воспринят третьим датчиком.

Событие (гипотеза) H_0 может быть представлено как произведение событий $\overline{B_1}$, $\overline{B_2}$ и $\overline{B_3}$:

$$H_0 = \overline{B_1}\,\overline{B_2}\,\overline{B_3}.$$

Событие H_1 и H_2 можно представить в виде суммы несовместных сложных событий (вариантов), представляющих собой произведения элементарных событий

$$H_1 = B_1\overline{B_2}\,\overline{B_3} + \overline{B_1}B_2\overline{B_3} + \overline{B_1}\,\overline{B_2}B_3;$$

$$H_2 = B_1B_2\overline{B_3} + B_1\overline{B_2}B_3 + \overline{B_1}B_2B_3.$$

Для гипотезы H_3 справедлива следующая запись:

$$H_3 = B_1B_2B_3 .$$

Пользуясь теоремами умножения для независимых событий и сложения для несовместных событий, найдем вероятности гипотез. Но вначале определим вероятности событий B_1, B_2, B_3. По условию задачи имеем:

$$P(\overline{B_1}) = 0{,}1; \quad P(\overline{B_2}) = 0{,}2; \quad P(\overline{B_3}) = 0{,}3.$$

Тогда

$$P(B_1) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9; \quad P(B_2) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8; \quad P(B_3) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$$

Следовательно,

$$P(H_0) = P(\overline{B_1}\,\overline{B_2}\,\overline{B_3}) = 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3 = 0{,}006,$$

$$P(H_1) = P(B_1\overline{B_2}\,\overline{B_3}) + P(\overline{B_1}B_2\overline{B_3}) + P(\overline{B_1}\,\overline{B_2}B_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 +$$

$$+ 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}092.$$

Аналогично,

$$P(H_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}398;$$

$$P(H_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504.$$

Гипотезы (события) H_0, H_1, H_2 и H_3 образуют полную группу несовместных событий, поэтому должно выполняться условие

$$P(H_0) + P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1,$$

которое можно использовать в качестве критерия правильности определения вероятностей гипотез.

Согласно условию задачи, условные вероятности события A (выполнение задачи, возлагаемой на РЭУ) при рассматриваемых гипотезах равны:

$$P(A \mid H_0) = 0; \quad P(A \mid H_1) = 0{,}7; \quad P(A \mid H_2) = 0{,}85; \quad P(A \mid H_3) = 1{,}0.$$

Применяя формулу полной вероятности (2.9), получим:

$$P(A) = P(H_0)\, P(A \mid H_0) + P(H_1)\, P(A \mid H_1) + P(H_2)\, P(A \mid H_2) + P(H_3)\, P(A \mid H_3) =$$
$$= 0{,}006 \cdot 0 + 0{,}092 \cdot 0{,}7 + 0{,}398 \cdot 0{,}85 + 0{,}504 \cdot 1{,}0 \approx 0{,}907.$$

Заметим, что первую гипотезу (H_0) можно было бы не вводить в рассмотрение, так как соответствующий член в формуле полной вероятности обращается в нуль.