Раздел 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

2.1. Понятие случайной величины

Случайной называют величину, которая в результате опыта (наблюдения, измерения) принимает одно возможное, но заранее неизвестное значение. Случайная величина может быть дискретной (иначе прерывной) и непрерывной.

Дискретная случайная величина может принимать конечное или бесконечное счётное число значений. Примеры дискретных случайных величин: число отказов РЭУ за рассматриваемый календарный период времени, например два года (возможные значения 0, 1, 2, 3, 4, …); частота попадания сопротивления резистора, взятого из партии с сопротивлением R = 1 кОм ± 10%, в диапазон (950…1000 Ом) при десяти наблюдениях (возможные значения 0, 1/10, 2/10, 3/10, …, 9/10, 1).

Непрерывной называют случайную величину, которая может принять любое значение из некоторого конечного или бесконечного промежутка числовой оси. Примеры непрерывной случайной величины: сопротивление резистора (экземпляра) из партии со значением R = 1 кОм ± 10%; коэффициент усиления β транзистора (экземпляра), для которого по техническим условиям $\beta \geq 20$.

2.2. Закон распределения дискретной случайной величины

Под законом распределения дискретной случайной величины понимают любое соответствие между её возможными значениями и вероятностями этих значений. Закон может быть задан аналитически (формулой), таблично (ряд распределения), графически (многоугольник распределения и др.).

2.2.1. Ряд распределения

Под рядом распределения *понимают таблицу вида*, показанного на рис.2.1. Здесь случайная величина n – число отказов РЭУ за два года эксплуатации; $p(n)$ – вероятность значения n.

n	0	1	2	3	4	…
$p(n)$	0,1	0,25	0,3	0,15	0,1	…

Рис. 2.1. Ряд распределения

2.2.2. Многоугольник распределения

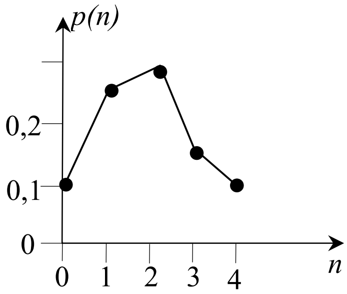

Рис. 2.2. Многоугольник распределения

Под многоугольником распределения *понимают фигуру*, изображённую на рис.2.2 (для случайной величины n, рассмотренной в предыдущем вопросе).

2.3. Функция распределения

Функция распределения является универсальной характеристикой описания случайных величин. Она существует для всех случайных величин: как дискретных, так и непрерывных. Под *функцией распределения* случайной величины X для текущего значения x понимают вероятность не события $X=x$, а вероятность события $X<x$. Обозначают это как

$$F(x) = P(X<x). \tag{2.1}$$

Функцию $F(x)$ называют интегральной функцией распределения, или интегральным законом распределения. Свойства функции $F(x)$:

1. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2>x_1$.
2. $F(x = -\infty) = 0$.
3. $F(x = +\infty) = 1$.

Для дискретных случайных величин $F(x)$ всегда есть *ступенчатая функция*, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений. Сумма всех скачков функции $F(x)$ равна единице.

2.4. Плотность распределения случайной величины

Под плотностью распределения случайной величины понимают величину

$$w(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x). \tag{2.2}$$

Функция w(x) существует только для непрерывных случайных величин, её называют плотностью распределения (иначе – «плотностью вероятности») случайной величины. Эту функцию называют также «дифференциальной функцией распределения» или «дифференциальным законом распределения» случайной величины. График функции $w(x)$ даёт наглядное представление о том, как плотно группируются значения случайной величины в той или иной области диапазона её возможных значений (рис. 2.3).

Основные свойства плотности распределения:

1. $w(x) \geq 0$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(x)dx = 1$,

т. е. полная площадь, ограниченная линией графика распределения и осью абсцисс, равна единице.

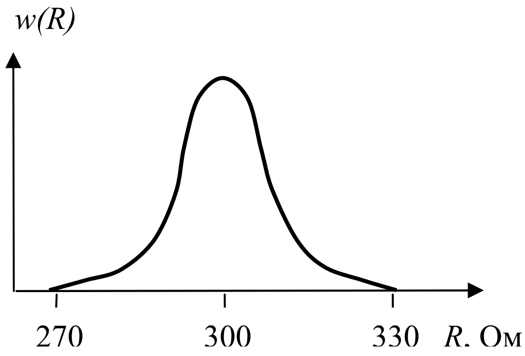

Рис. 2.3. Плотность распределения параметра *R* = 300 Ом ±10%

Зная $w(x)$, $F(x)$ для любого интересующего значения $x = a$ определяют как

$$F(a) = \int\limits_{-\infty}^{a} w(x)dx . \qquad (2.3)$$

2.5. Закон распределения непрерывной случайной величины

Закон распределения непрерывной случайной величины – собирательный термин, используемый для обозначения способов математического описания непрерывной случайной величины. Закон распределения может быть задан функцией распределения $F(x)$ как универсальной характеристикой описания любых случайных величин и (или) плотностью распределения $w(x)$, которая существует только для непрерывных случайных величин. Функции $F(x)$ и $w(x)$ несут о непрерывной случайной величине одну и ту же информацию, но в разной форме.

2.6. Основные числовые характеристики случайной величины

Для решения ряда практических задач нет необходимости характеризовать случайную величину полностью, исчерпывающим образом. В ряде случаев достаточно использовать *числовые характеристики случайной величины*, т.е. такие характеристики, назначение которых – выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения. Их называют числовыми характеристиками случайной величины.

2.7. Характеристики положения случайной величины

Они характеризуют основные особенности положения случайной величины на числовой оси. Такими характеристиками являются *математическое ожидание* (M_x), *мода* (**M**) и *медиана* (Me).

2.7.1. Математическое ожидание

Для определённости случайная величина далее обозначена как X. Из характеристик положения X важнейшую роль играет математическое ожидание случайной величины M_x, просто называемое иногда *средним значением* случайной величины. Для дискретной случайной величины M_x определяют как

$$M(X) = M_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,, \tag{2.14}$$

где n – число возможных значений случайной величины.

Для непрерывных случайных величин M_x определяют не суммой, а интегралом

$$M_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, w(x)\, dx \,. \tag{2.15}$$

2.7.2. Мода

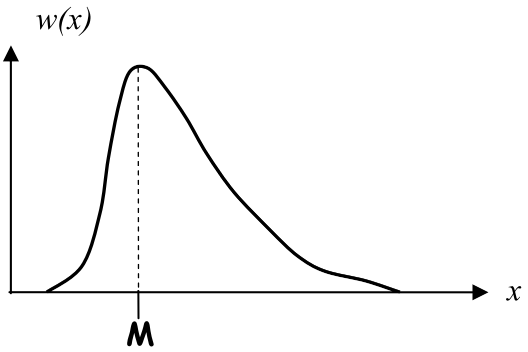

Рис.2.4. Мода непрерывной случайной величины

Для дискретной случайной величины модой (**M**) называют *наиболее вероятное* значение. Для случайной величины n (см. рис. 2.2) **M** = 2.

Для непрерывной случайной величины модой является то значение, в котором плотность распределения максимальна (рис. 2.4).

Если многоугольник распределения или кривая плотности распределения имеет более одного максимума, распределение называется «многомодальным» или «полимодальным». На рис.2.5 в качестве примера показан возможный вид функции *w(x)* двухмодального распределения.

Если распределение имеет посередине не максимум, а минимум, то его называют «антимодальным». Возможный вид графика функции *w(x)* антимодального распределения показан на рис.2.6.

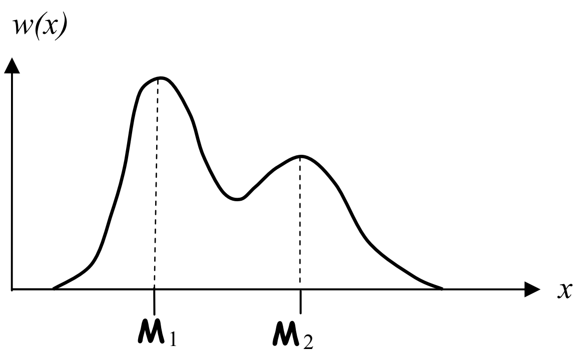

Рис.2.5. Полимодальное распределение

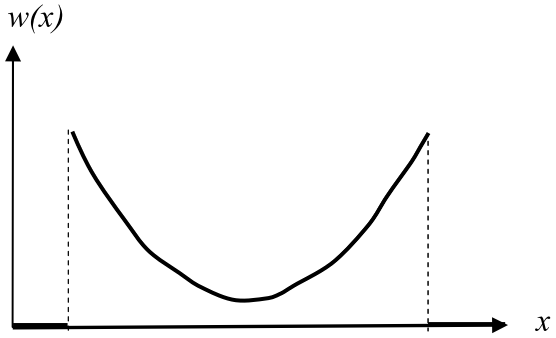

Рис. 2.6. Антимодальное распределение

2.7.3. Медиана

Этой характеристикой пользуются обычно для непрерывных случайных величин. *Медианой случайной величины X* называют такое значение *Me,* для которого

$$P(X < Me) = P(X > Me),$$

т. е. одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше значения *Me*. Это означает то, что площади S_1 и S_2 под кривой функции *w(x)* численно равны (рис. 2.7).

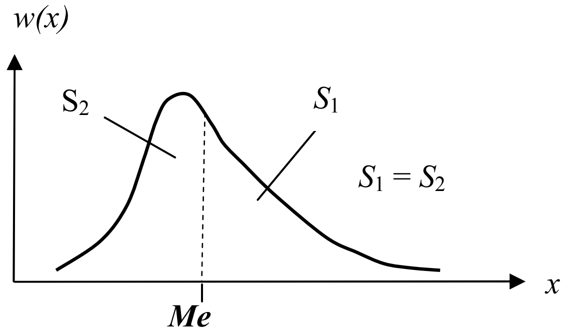

Рис. 2.7. Медиана непрерывной случайной величины

2.8. Характеристики разброса случайной величины

В качестве таких характеристик используют дисперсию и среднее квадратическое отклонение (иначе – «стандартное отклонение»). Они показывают степень разброса случайной величины относительно математического ожидания M_x.

Дисперсию случайной величины *x* определяют как

$$D(X) = D_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M_x)^2 p_i \,, \qquad (2.16)$$

$$D(X) = D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^2 w(x) dx \qquad (2.17)$$

– соответственно для дискретных и непрерывных величин.

Среднее квадратическое отклонение (СКО) определяют выражением

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \,. \qquad (2.18)$$

2.9. Коэффициент асимметрии

Его используют для характеристики асимметрии (или «скошенности») распределения и определяют как

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma_x},$$

где μ_3 – третий центральный момент случайной величины, определяемый выражением:

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M_x)^3 p_i,$$

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^3 w(x) dx$$

– соответственно для дискретных и непрерывных величин.

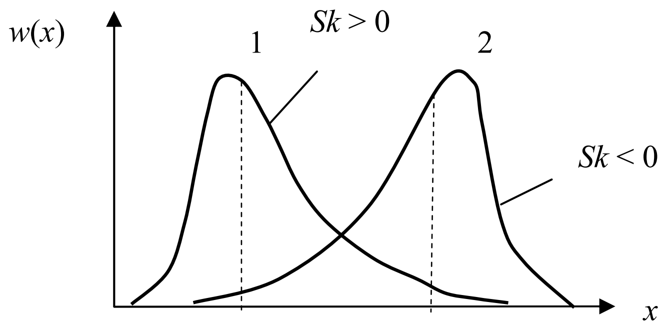

Рис. 2.8. Асимметричные распределения

На рис.2.8 распределение 1 имеет положительную асимметрию ($Sk > 0$), а распределение 2 – отрицательную ($Sk < 0$).

2.10. Эксцесс

Используется для описания островершинности или плосковершинности распределения. Его определяют как

$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3,$$

где μ_4– центральный четвёртый момент случайной величины; находится по аналогии с определением третьего центрального момента.

Для островершинных распределений $Ex > 0$, для плосковершинных – $Ex < 0$. Для широко распространённого в технике нормального распределения [4, с. 20)] $Ex = 0$.