Раздел 3. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ ПАРАМЕТРОВ В РАДИОЭЛЕКТРОНИКЕ И ПРИБОРОСТРОЕНИИ

3.1. Понятие параметров. Выходные и первичные параметры

Все физические величины, характеризующие объект, процесс или внешнюю среду, в технике называются *параметрами*. Применительно к изделиям радиоэлектроники и приборостроения различают выходные и первичные параметры.

Выходной параметр характеризует меру функций, для выполнения которых предназначено устройство или технологический процесс. Все другие параметры устройства (конструкции) или технологического процесса, а также параметры внешней среды, которые в той или иной степени влияют на выходной параметр, называют *первичными* (иногда входными) *параметрами*.

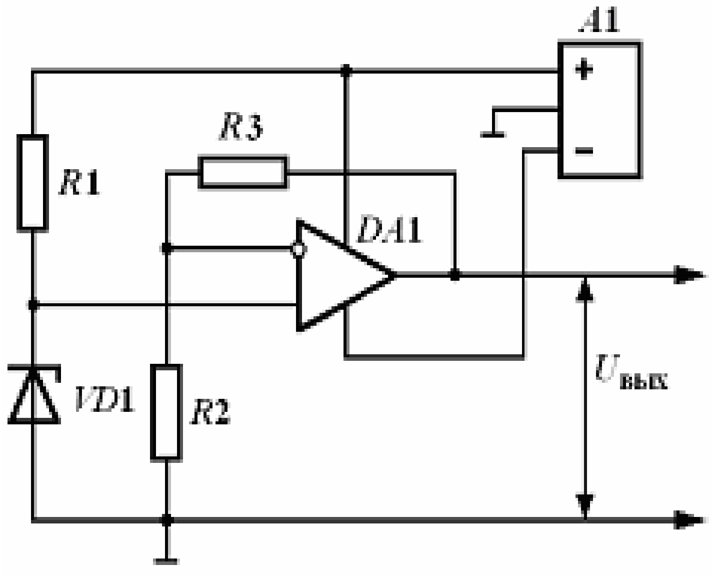

Рис. 3.1. Источник опорного напряжения

Например, для неинвертирующего источника высокостабильного (опорного) напряжения, выполненного с использованием операционного усилителя $DA1$ (рис. 3.1), в качестве выходного параметра может рассматриваться выходное напряжение $U_{\text{вых}}$.

Первичными параметрами в этом случае являются параметры резисторов $R1$-$R3$, напряжение стабилизации стабилитрона $VD1$, напряжение источника питания $A1$, возможно, параметры операционного усилителя $DA1$ (коэффициент усиления, входное сопротивление и т.д.) и параметры окружающей среды.

Устройство (конструкция) или технологический процесс могут характеризоваться в общем случае совокупностью выходных параметров. Для усилителя звуковых частот это, например, выходная мощность, коэффициент усиления по мощности, коэффициент нелинейных искажений, диапазон воспроизводимых частот и т.д. В зависимости от решаемой инженерной задачи может рассматриваться один или несколько выходных параметров.

Заметим, что каждый элемент радиоэлектронного устройства (РЭУ) в общем случае может описываться совокупностью первичных параметров. Однако в зависимости от физической сущности рассматриваемого элемента РЭУ во внимание могут приниматься один (резисторы, конденсаторы и т.п.) или несколько (транзисторы, интегральные микросхемы, диоды) первичных параметров.

Например, для биполярного транзистора в качестве первичных параметров могут рассматриваться h-параметры, обратный ток коллекторного перехода и др.

3.2. Внутренние и внешние параметры

В ряде случаев вместо термина первичные параметры пользуются понятиями внутренние и внешние параметры, которые могут рассматриваться как разновидности первых. Под *внутренними* и *внешними* понимают параметры, характеризующие соответственно составные части РЭУ (технологического процесса) и внешнюю по отношению к нему среду. Например, если для источника опорного напряжения (рис. 1.1) в качестве выходного параметра рассматривать напряжение $U_{вых}$, то внутренними параметрами будут сопротивления резисторов $R1$-$R3$, напряжение стабилизации стабилитрона $VD1$, параметры операционного усилителя, а внешними – сопротивление нагрузки, напряжение источника питания $A1$, температура окружающей среды и др.

В дальнейшем внутренние и внешние параметры обобщенно будем называть первичными.

Употребление терминов *"выходной"* и *"первичный"* параметры в известной степени носит условный характер и зависит от уровня структурной единицы конструкции устройства или технологического процесса. Например, выходные параметры электронных каскадов и функциональных узлов могут рассматриваться в качестве первичных параметров для блоков, а выходные параметры блоков – в качестве первичных для радиоэлектронного аппарата в целом.

3.3. Случайный характер параметров в радиоэлектронике и приборостроении

В силу объективно действующих причин параметры элементов, технологических операций, свойства материалов, характеристики инструмента всегда имеют некоторый разброс относительно своих средних (номинальных) значений.

По сути, параметры, с которыми приходится иметь дело в радиоэлектронике и приборостроении являются случайными.

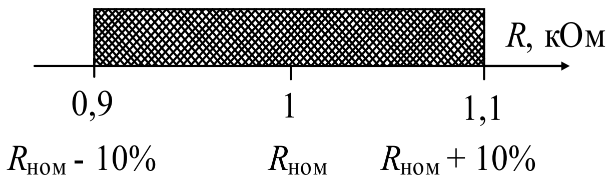

Рис.3.2. Диапазон изменения сопротивления резистора

Однако понятие случайности в данном случае не означает полный хаос. Значения параметров с большой степенью вероятности будут попадать в диапазон, определяемый полем допуска (рис.3.2).

Для анализа точности и стабильности выходных параметров надо располагать моделью (выражением) вида

$$y = \varphi(x_1, ..., x_n), \tag{3.1}$$

где y – выходной параметр;

$x_1, \ldots, x_n$ – первичные параметры;

n – число учитываемых первичных параметров.

Кроме того, надо знать вероятностное описание первичных параметров. Под ***вероятностным описанием*** будем понимать количественные характеристики, дающие представление о среднем значении параметра, степени его разброса относительно среднего значения, характере группирования значений параметра в той или иной области и т.д.

3.4. Понятие вероятностного описания случайных параметров

В качестве вероятностного описания параметров можно использовать его основные числовые характеристики, а именно:

а) математическое ожидание параметра $M(x)$;

б) среднее квадратичес-кое отклонение параметра $\sigma(x)$ или дисперсию $D(x)$, где x – рассматриваемый параметр.

Указанные характеристики хороши для инженерного использования, однако не дают ответ на вопрос, как сгруппированы значения параметра в пределах поля допуска (рис.3.2).

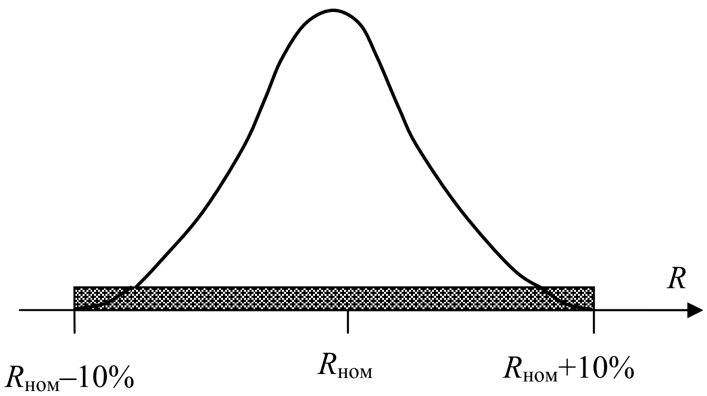

Рис. 3.2. Группирование значений сопротивления резистора в пределах поля допуска

3.5. Определение вероятности попадания параметра в заданный диапазон

Для ответа на этот вопрос в инженерной практике используют закон распределения параметра в пределах поля допуска. Пользуются либо плотностью распределения параметра $w(x)$ или функцией распределения $F(x)$. Функции w и F несут о рассматриваемом параметре x одну и ту же информацию, но в разной форме.

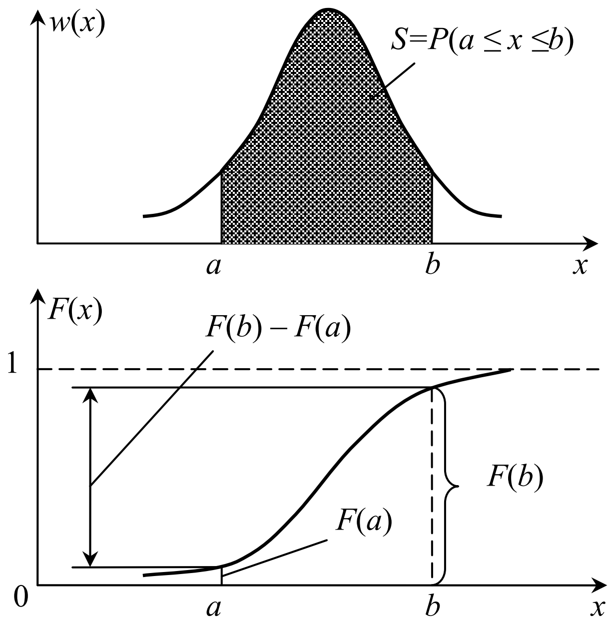

Рис.3.3. Определение вероятности попадания параметра в заданный диапазон

Инженера конструктора-технолога нередко интересует вопрос, какова вероятность того, что параметр x будет находится в диапазоне от a до b. Эта вероятность с использованием функций w и F может быть определена как

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b w(x)dx\,; \qquad (3.2)$$

$$P(a<x<b) = F(b)\text{-}F(a). \quad (3.3)$$

Геометрическая интерпретация выражений (3.2) и (3.3) показана на рис.3.3.

3.6. Законы распределения, используемые для описания случайных параметров в радиоэлектронике и приборостроении

3.6.1. Общие сведения

В инженерной практике пользуются термином "модель закона распределения параметра", имея в виду, что истинный закон распределения параметра может быть вообще нам не известен, а используем мы некоторое приближение этого закона, полученное экспериментально.

Известно более 300 видов моделей законов распределения. При проектировании изделий радиоэлектроники и приборостроения используют не более 10–20 из них. Широко используют такие модели как нормальную, усечённую нормальную, равномерную, экспоненциальную, логарифмически нормальную, модель Вейбулла.

3.6.2. Нормальный закон

Функция плотности распределения параметра для этой модели имеет вид

$$w(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (3.4)$$

где x – рассматриваемый параметр и его текущие значения;
m, σ – параметры (характеристики) распределения.

Функция распределения $F(x)$ для нормальной модели может быть получена в виде

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (3.5)$$

Указанный интеграл нельзя выразить через элементарные функции. Для его определения используют специальные табличные функции. В инженерной практике широко используют две:

а) $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$

где $\Phi(x)$ – нормальная функция распределения параметра со значениями $m = 0$, $\sigma = 1$ (в дальнейшем – функция стандартного нормального распределения);

б) $\Phi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$

где $\Phi_1(x)$ — функция Лапласа.

Связь между этими функциями такова:

$$\Phi(x)=0{,}5+\Phi_1(x).$$

В дальнейшем будем пользоваться функцией $\Phi(x)$.

Тогда функция распределения параметра x в случае нормальной модели запишется в виде

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right), \qquad (3.6)$$

где $\dfrac{x - m}{\sigma}$ – аргумент функции Ф.

С учетом выражения (3.6) вероятность вида $P(a \le x \le b)$ может быть определена как

$$P(a \le x \le b) = \Phi\left(\frac{b - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - m}{\sigma}\right), \qquad (3.7)$$

Выражением (3.7) очень широко пользуются в инженерной практике при решении прикладных задач. С характеристиками m и σ нормальной модели как-то связаны основные числовые характеристики параметра $M(x)$ и $\sigma(x)$. Для нормальной модели, и только для нее, справедливы равенства:

$$\begin{cases} m = M(x), \\ \sigma = \sigma(x). \end{cases}$$

Графики функций $w(x)$ и $F(x)$ приведены на рис.3.4.

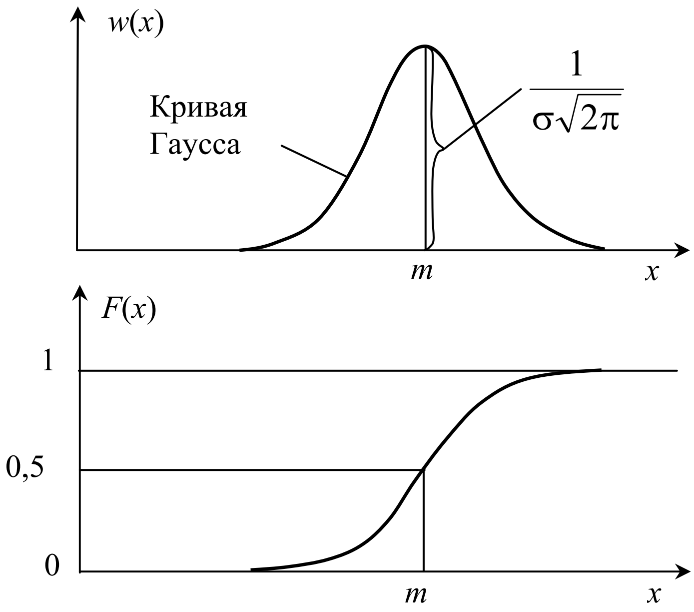

Рис. 3.4. Графики функций $w(x)$ и $F(x)$ для нормальной модели

Правило трёх сигм

В случае нормальной модели инженера может интересовать вопрос, какова вероятность вида

$$P(m - n \cdot \sigma \le x \le m + n \cdot \sigma),$$

где n = 1, 2, 3, … – целые числа.

Применяя выражение (3.7), для n = 1, 2, 3 получим значения, приведенные в табл.3.1.

Таблица 3.1

Значения вероятностей $P(m-n\cdot\sigma \le x \le m+n\cdot\sigma)$ в зависимости от n

n	1	2	3
$P(m-n\cdot\sigma \le x \le m+n\cdot\sigma)$	0,68	0,95	0,9973

Из табл.3.1 видно, что в диапазон (m-3σ; m +3σ) укладывается практически все рассеивание параметра (99,73% значений). Поэтому на практике, определив характеристики нормальной модели m и σ, предельными значениями рассматриваемого параметра считают точки, отстоящие от величины m на ±3σ (рис.3.5). Такой способ оценки предельных отклонений параметра получил название "правила трех сигм". Этим правилом широко пользуются при установлении допусков на параметры.

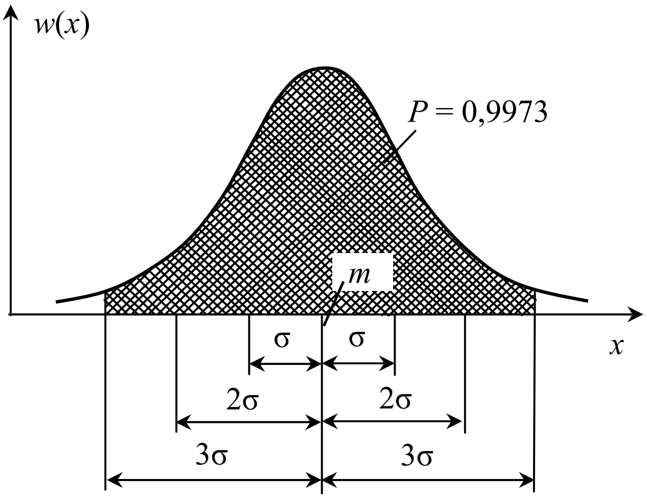

Рис. 3.5. К пояснению “правила трёх сигм”

Если есть основания принять модель распределения параметра нормальной, то половина поля допуска (δ) может устанавливаться по "правилу трех сигм" в виде

$$\delta \approx 3\sigma. \qquad (3.9)$$

Примерно в 95% случаев параметры в радиоэлектронике и приборостроении распределены по законам близким к нормальному. Замечено, что для параметров резисторов и конденсаторов, имеющих допуск ±10% и более, в большинстве случаев оправдано использование нормальной модели.

3.6.3. Усечённый нормальный закон

Параметры в радиоэлектронике и приборостроении, являясь случайными величинами, часто меняются в ограниченных пределах от A до B. Поэтому часто для их описания используют усеченную нормальную модель (распределение).

Функция плотности (w) распределения параметра в этом случае имеет вид

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < A; \\ \dfrac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} & \text{при } A \le x \le B; \\ 0 & \text{при } x > B, \end{cases}$$

где m, σ – математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение исходного неусеченного нормального распределения (модели).

Величину C определяют как

$$C = \frac{1}{\Phi\left(\dfrac{B - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{A - m}{\sigma}\right)},$$

где Φ(...) – табличная функция стандартного нормального распределения (табл. П1.1 прил. 1).

Функция распределения $F(x)$ в случае усеченной нормальной модели может быть получена в виде

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < A; \\ C\left[\Phi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{A-m}{\sigma}\right)\right] & \text{при } A \le x \le B; \\ 1 & \text{при } x > B, \end{cases}$$

Графики функций $w(x)$ и $F(x)$ показаны на рис. 3.6.

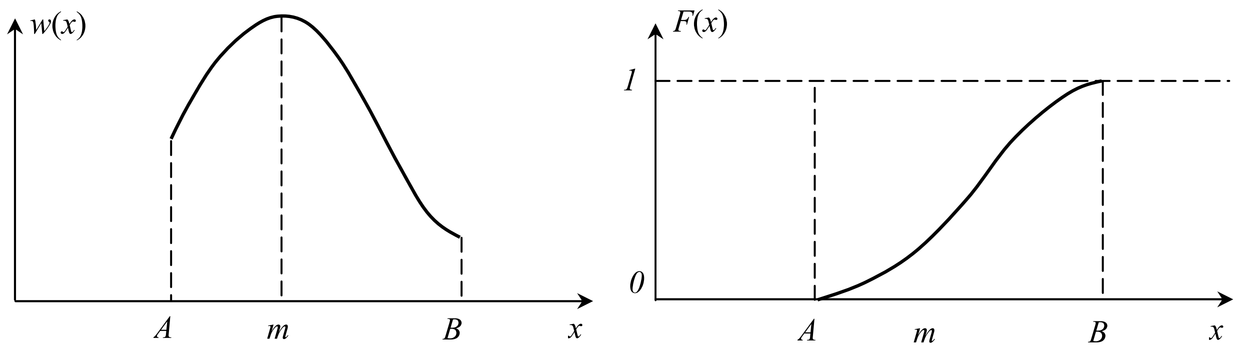

Рис. 3.6 Графики функций *w*(*x*) и *F*(*x*) для усеченной нормальной модели

Характеристики усеченной нормальной модели A, B, m и σ связаны с основными числовыми характеристиками рассматриваемого параметра $M(x)$ и $\sigma(x)$ выражениями

$$M(x) = m + K\sigma;$$

$$\sigma(x) = \sigma\sqrt{1 - K^2 - C[t_2\varphi(t_2) - t_1\varphi(t_1)]};$$

$$K = \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_2)}{\Phi(t_2) - \Phi(t_1)};\quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}},$$

где $t_1 = \dfrac{A - m}{\sigma}$; $t_2 = \dfrac{B - m}{\sigma}$.

3.6.4. Логарифмически нормальный закон

Для логарифмически нормального закона распределения характерно то, что по нормальному закону распределен не сам случайный параметр, а его логарифм.

Функция $w(x)$ для логарифмически нормального закона имеет вид

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{1}{M_1 \sigma_x x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lg x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

где m_x, σ_x – параметры модели; $m_x = M(\lg x)$;; $\sigma_x = \sigma(\lg x)$;

$$M_1 = \frac{1}{\lg e} = 2{,}303.$$

Функция распределения $F(x)$ может быть получена в виде

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{\lg x - m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Вид графика функции $w(x)$ зависит от значения параметра σ_x (рис. 2.7). Параметры m_x и σ_x логарифмически нормального закона связаны с числовыми характеристиками $M(x)$ и σ_x выражениями

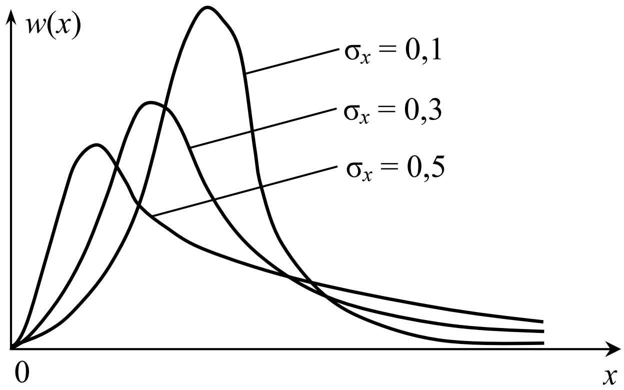

Рис.3.7 График функции $w(x)$ для логарифмически нормальной модели.

$$M(x) = 10^{m_x} \exp\left[\frac{M_1^2 \sigma_x^2}{2}\right],$$

$$\sigma(x) = M(x)\sqrt{\left[\frac{M(x)}{10^{m_x}}\right]^2 - 1}.$$

При малых значениях σ_x логарифмически нормальная модель близка к нормальной. Поэтому при σ_x < 0,1…0,3 возможна приближенная замена логарифмически нормального закона нормальным законом с параметрами

$$m = 10^{m_x} \exp\left[\frac{M_1^2 \sigma_x^2}{2}\right];$$

$$\sigma = M_1 10^{m_x} \sigma_x .$$

Иногда в логарифмически нормальном законе распределения используют натуральный логарифм рассматриваемого параметра.

3.6.5. Равномерный закон распределения

Функция плотности распределения w в этом случае имеет вид

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a \le x \le b; \\ 0, & \text{если } x < a \text{ или } x > b, \end{cases} \qquad (3.10)$$

где a, b – параметры закона распределения.

Функция распределения $F(x)$ может быть найдена как

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} w(x)dx = \frac{x-a}{b-a}. \qquad (3.11)$$

Графики функций $w(x)$ и $F(x)$ имеют вид, показанный соответственно на рис. 3.8 и 3.9.

Параметры закона распределения a и b связаны с основными числовыми характеристиками $M(x)$ и $\sigma(x)$ выражениями

$$M(x) = \frac{a+b}{2}; \qquad (3.12)$$

$$\sigma(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (3.13)$$

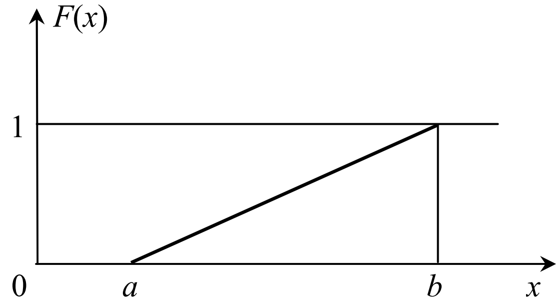

Рис. 3.8. График функции распределения $F(x)$ для равномерного закона

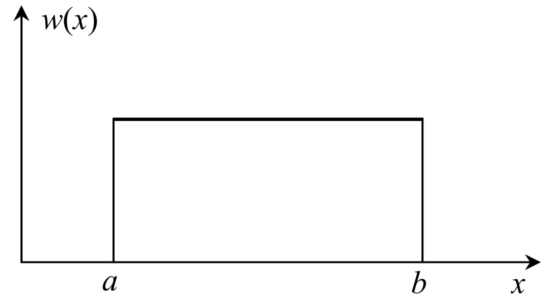

Рис. 3.9. График плотности распределения $w(x)$ для равномерного закона

Из-за вида графика функции $w(x)$ равномерное распределение (модель) называют также прямоугольным распределением. Равномерное распределение на практике – чаще всего следствие вмешательства человека. Например, закон распределения параметра для элементов повышенной точности, полученных путём отбора из выборки с относительно большим допуском на параметр, может быть принят равномерным. Объяснение этому даёт рис. 3.10. Неравномерностью на вершине пренебрегают и пользуются равномерной моделью (см. рис. 3.10, *б*).

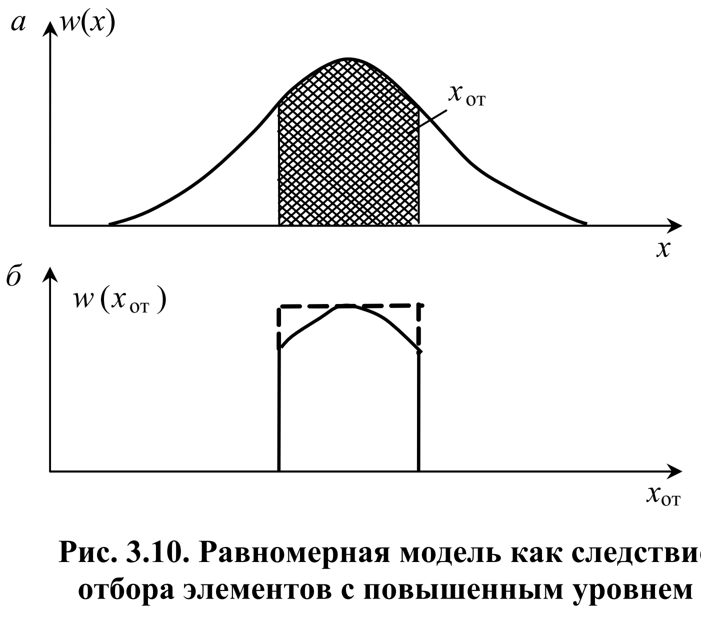

Рис. 3.10. Равномерная модель как следствие отбора элементов с повышенным уровнем точности параметров

Для резисторов и конденсаторов, имеющих допуск на параметры ±5% и менее, в большинстве практических случаев оправдана гипотеза о равномерном распределении параметра, так как, по всей видимости, высокая точность параметра достигалась путем отбора элементов.

В случае, когда нет оснований принять гипотезу о равномерной или нормальной моделях и сложно определить закон распределения экспериментально, следует пользоваться равномерной моделью, так как она является на практике предельным (наихудшим) случаем рассеивания параметров.

3.7. Способы задания вероятностного описания случайных параметров

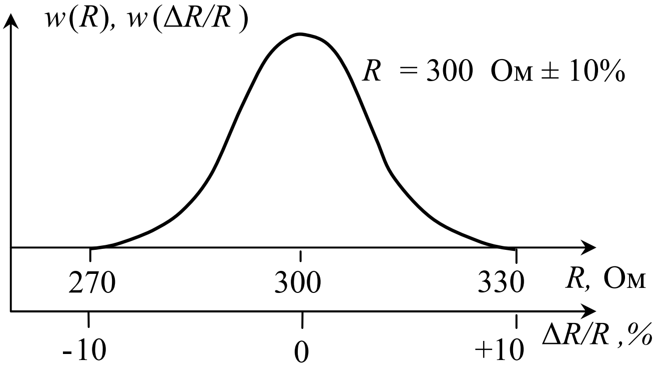

Рис.3.11. Вероятностное описание параметров

В инженерной практике пользуются либо вероятностным описанием параметра, взятым в своей размерности, либо вероятностным описанием его относительной погрешности (разброса, отклонения). Связь между указанными вероятностными описаниями иллюстрируется рис. 3.11.

Отметим, что вид закона распределения при переходе от R к $\Delta R/R$ сохраняется, меняются только его параметры. Так в случае рассмотрения в качестве параметра величины R и предположения о нормальном законе его распределения характеристиками m и σ нормального закона являются значения

$$m = R_{\text{ном}} = 100 \text{ Ом};$$

$$\sigma = \left| \begin{array}{l} \text{По «правилу} \\ \text{трёх сигм»} \end{array} \right| \approx (330 - 300)/3 = 10 \text{ Ом}.$$

При рассмотрении в качестве параметра величины $\Delta R/R$ характеристиками нормального закона являются значения

$$m = 0;$$

$$\sigma \approx (+10 - 0)/3 \approx 3{,}3\ \%.$$

3.8. Зависимые и независимые параметры

Рассматриваемые параметры X и Y являются независимыми, если значение одного из них совершенно не зависит от того, какое значение принял другой параметр. В противном случае параметры являются зависимыми, причём не обязательно функционально, в технике во многих случаях – не функционально.

Условие независимости параметров может быть записано в виде

$$w(y|x) = w(y) \qquad (3.14)$$

при любых текущих значениях y и x, взятых из диапазона возможных значений параметров X и Y. В выражении (3.14) $w(y|x)$ – плотность распределения параметра Y при условии, что параметр X принял текущее значение x. Функцию $w(y|x)$ называют условной плотностью распределения (в данном случае параметра Y).

Для зависимых параметров: $w(y|x) \neq w(y)$.

3.9. Корреляция параметров

В технике, да и в жизни вообще, кроме жестких, т.е. функциональных связей между параметрами существует так называемый вероятностный или стохастический характер связи, при котором каждому значению одного из параметров, может соответствовать одно или несколько значений другого параметра.

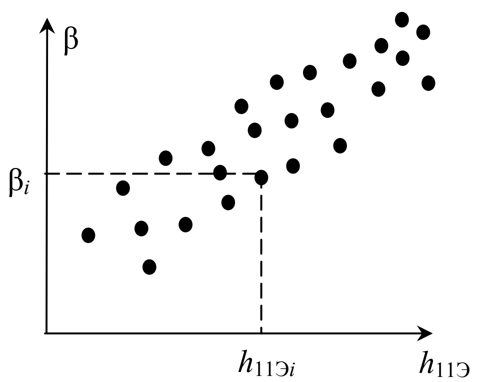

Рис. 3.12. Корреляционное поле параметров

Для количественной оценки силы вероятностной связи между параметрами обычно используют математический аппарат корреляционного анализа. Поэтому вероятностную связь между параметрами часто называют корреляционной связью.

Первое суждение о силе корреляционной связи можно получить по виду так называемого корреляционного поля (иначе – диаграмме разброса) параметров. *Корреляционное поле параметров* представляет собой совокупность точек, нанесенных на прямоугольную систему координат, причем каждая точка соответствует паре рассматриваемых параметров. Например, корреляционное поле параметров β и $h_{11Э}$ транзистора может принять вид, показанный на рис. 3.12.

В технике с каждой точкой корреляционного поля «связан» экземпляр объекта или реализация процесса.

Если точки корреляционного поля группируются вблизи прямой линии, мысленно проведенной в этом поле, то между параметрами имеет место тесная корреляционная связь.

Для количественной оценки тесноты или силы связи между параметрами пользуются ***коэффициентом корреляции***, подсчитываемым по формуле [1]

$$r_{x,z} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)(z_i - m_z)}{(n-1)\sigma_x \sigma_z}, \qquad (3.15)$$

где x, z – рассматриваемые параметры;

x_i, z_i – i-е значение параметра x и соответствующее ему значение параметра z;

m_x, m_z – математические ожидания параметров x и z;

σ_x, σ_z – средние квадратические отклонения параметров x и z;

n – число наблюдений пар параметров x и z.

Коэффициент корреляции, подсчитываемый по формуле (3.15), лежит в пределах от –1 до +1. Он характеризует близость корреляционной связи между параметрами к их линейной функциональной зависимости. Между параметрами имеет место линейная функциональная связь, если $r = \pm 1$ (рис. 3.13).

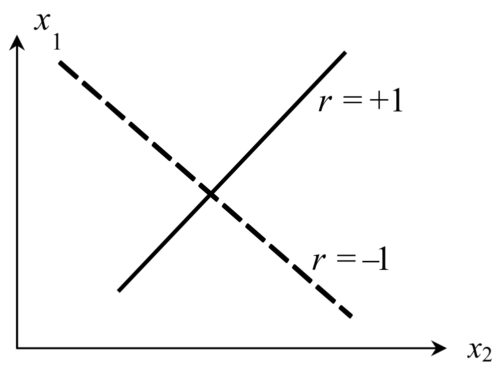

Рис. 3.13. Линейная функциональная связь между параметрами

Различают отрицательную и положительную корреляцию между параметрами. Для отрицательной корреляции $r < 0$, для положительной $r > 0$. Вид корреляционного поля для этих случаев показан на рис.3.14.

Если $r = 0$, то мы имеем дело практически с независимыми параметрами. Вид корреляционного поля в этом случае близок к показанному на рис. 3.15.

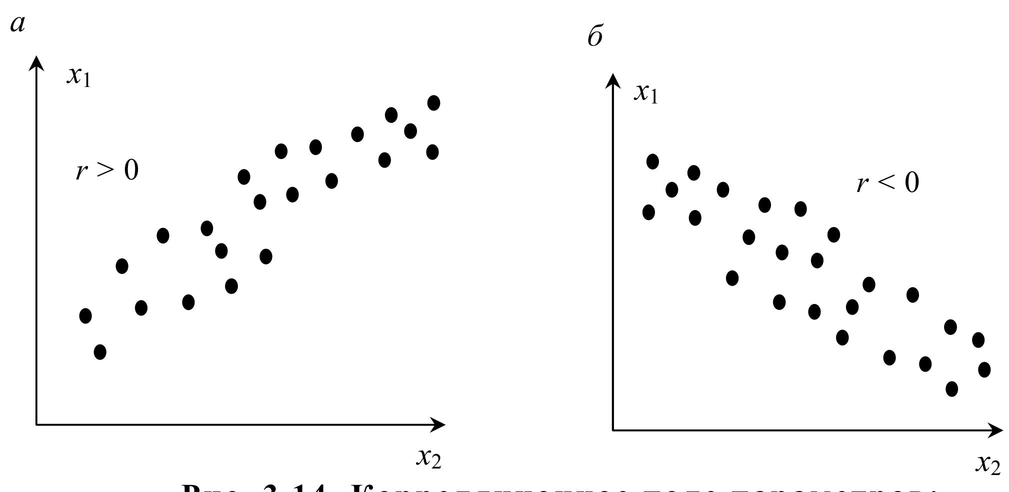

Рис. 3.14. Корреляционное поле параметров:
***а* – положительная корреляция; *б* – отрицательная корреляция**

Известны случаи, когда коэффициент корреляции, подсчитываемый по выражению (3.15), оказывается близким к нулю, но между параметрами существует тесная связь (рис. 3.16).

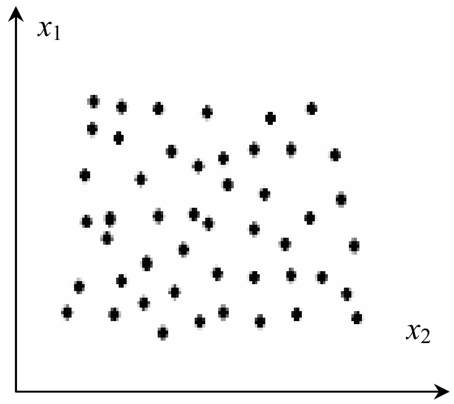

Рис. 3.15. Корреляционное поле практически независимых параметров

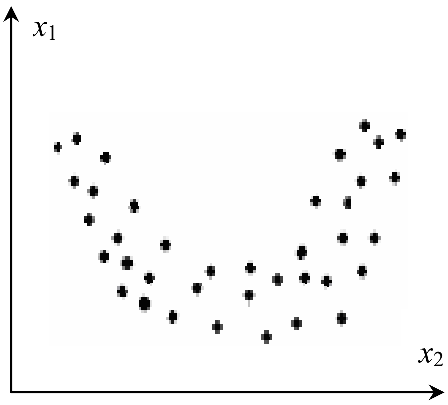

Рис. 3.16. Корреляционное поле параметров при нелинейной связи

Дело здесь в том, что коэффициент, подсчитываемый по выражению (3.15), выявляет лишь линейную составляющую вероятностной связи между параметрами. По этой причине его часто называют коэффициентом линейной корреляции (существует еще и криволинейная корреляция).

Коэффициент, определяемый по выражению (3.15), называют также коэффициентом парной корреляции, имея ввиду, что рассматривается корреляция между парой параметров. Существует также такое понятие, как множественная корреляция.

Характерным примером коррелированных параметров из жизни является масса и рост человека.

3.10. Вероятностное описание зависимых параметров. Корреляционная матрица

В инженерной практике для вероятностного описания зависимых параметров пользуются характеристиками $M(x_i)$, $\sigma(x_i)$, $w(x_i)$, r_{ij}; $i, j = 1, 2, ..., n$; $i \neq j$, где n – число параметров совокупности.

Во многих случаях для удобства записи информацию о зависимости параметров представляют в виде корреляционной матрицы. Она представляет собой таблицу, каждая ячейка которой содержит запись коэффициента парной корреляции. Например, корреляционная матрица h - параметров транзисторов может быть представлена в виде табл. 3.2.

Таблица 3.2

Корреляционная матрица h-параметров транзисторов

Параметр	h_{11}	h_{21}	h_{12}	h_{22}
h_{11}	1,00			
h_{21}	0,80	1,00		
h_{12}	0,55	0,30	1,00	
h_{22}	0,25	0,4	0,45	1,00

Корреляционная матрица является симметричной относительно единичной диагонали, поэтому заполняют либо верхнюю, либо нижнюю ее часть.