

# Автореферат

**Наименование** Математические методы экономических исследований

**Автор** А.В.Михалькевич

**Специальность** 1-28 01 01 «Экономика электронного бизнеса»,

**Анотация**

**Математические методы экономических исследований** - это дисциплина, изучающая инструменты анализа экономических явлений и процессов, построения теоретических моделей, позволяющих отобразить существующие связи в экономической жизни, прогнозировать поведение экономических субъектов и рассчитывать экономическую динамику.

**Anotation in English**

**Mathematical methods of economic research** is a discipline that studies tools for analyzing economic phenomena and processes, building theoretical models that allow you to display existing relationships in economic life, predict the behavior of economic entities and calculate economic dynamics.

**Ключевые слова** Математический анализ, экономика, электронный бизнес, экономические исследования, экономика электронного бизнеса

**Количество символов** 160173

## Содержание

[Введение](#)

1 [Предмет и задачи курса](#)

2 [Системный подход к моделированию электронного бизнеса](#)

3 [Динамические модели в экономике](#)

4 [Линейные модели оптимального планирования](#)

5 [Методы параметрической оптимизации](#)

6 [Методы многокритериальной оптимизации](#)

7 [Математические методы анализа спроса и предложения](#)

8 [Элементы теории полезности](#)

9 [Игровые модели рыночного поведения](#)

10 [Метод анализа иерархий](#)

11 [Экспертные методы принятия решений](#)

12 [Марковские процессы принятия решений](#)

[Заключение](#)

[Список использованных источников](#)

[Приложения](#)

## Введение

### 1 Предмет и задачи курса

Электронный бизнес как экономическая система. Структура электронного бизнеса. Принципы формирования систем электронного бизнеса.

Понятие о современных концепциях анализа и управления данными: Data Mining, Big Data, Predictive

Сфера электронного бизнеса в настоящее время является одной из наиболее динамично развивающихся в мире. В Республике Беларусь развитию электронного бизнеса также придается большое значение.

Под электронным бизнесом понимается деловое взаимодействие с помощью средств Интернет, включающее: куплю-продажу, факторинг, лизинг, консалтинг, страхование, банковские услуги, совместную и другие формы делового сотрудничества. В электронном бизнесе выделяют четыре слоя:

- Интернет- инфраструктура;
- Интернет-услуги;
- информационные посредники;
- электронная коммерция.

В электронном бизнесе не имеют существенного значения такие характеристики, как географическое местоположения продавца и потребителей, международные границы, часы работы предприятий и другие. Это позволяет снижать издержки, увеличивать оборачиваемость и расширять географические границы присутствия предприятия на рынке. В связи с активным развитием и внедрением технологий электронной коммерции появилась востребованность в научных разработках методик применения экономико-математических методов для исследования состояния, перспектив развития и выработке стратегий развития электронного бизнеса. Использование экономико-математических методов для решения прикладных задач электронного бизнеса позволит повысить эффективность деятельности в данной области.

Одним из инструментов анализа в экономике является экономико-математическое моделирование. Этот инструмент позволяет решать широкий круг задач – прогнозирование развития, анализ, выработка управленческих решений. Как правило, экономико-математические модели разрабатываются в ситуациях, когда решить экономические проблемы с помощью традиционных методов обработки информации не представляется возможным. Основная цель разработки прикладной экономико-математической модели заключается в создании инструмента комплексного анализа и прогноза и на их основе создания информационной базы для принятия управляющих решений и усиления степени обоснованности принимаемых решений.

Экономико-математическое моделирование основывается на принципе аналогии. Объект исследуется и изучается через рассмотрение другого, подобного ему и более доступного объекта, его модели. Модель создается исследователем с целью получения новых знаний об объекте-оригинале и отражает существенные (с точки зрения разработчика) свойства оригинала.

Процесс моделирования можно условно подразделить на пять этапов: 1) анализ теоретических закономерностей, свойственных изучаемому явлению или процессу, и эмпирических данных о его структуре и особенностях; на основе такого анализа формируются модели; 2) определение математических методов, с помощью которых можно решить задачу; 3)

построение экономико-математической модели; 4) численное решение задачи; 5) анализ полученных результатов.

Моделирование - циклический процесс. Это означает, что за первым пятиэтапным циклом может последовать второй, третий и т.д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется. В методологии моделирования, таким образом, заложены большие возможности саморазвития и совершенствования.

Разработка математических моделей в области экономики имеет ряд специфических особенностей. В области электронного бизнеса возникают дополнительные проблемы. Рассмотрим их более подробно.

Прежде всего большинство экономических объектов и процессов являются сложными системами.

Под системой понимается множество элементов, обладающих следующими свойствами:

- Целостность, подразумевающая несводимость свойств системы к сумме свойств отдельных элементов
- Наличие более одной составляющих, называемых подсистемами
- Наличие внешней среды, для которой анализируемая система является подсистемой
- Наличие цели функционирования системы.

Система электронного бизнеса включает в себя совокупность программно-аппаратных средств, поток посетителей, который не ограничен по времени и, чаще всего, по интенсивности; менеджеров, непосредственно взаимодействующих с посетителями и др.

С позиций системного подхода модель объекта электронного бизнеса можно представить в виде «черного ящика» ()

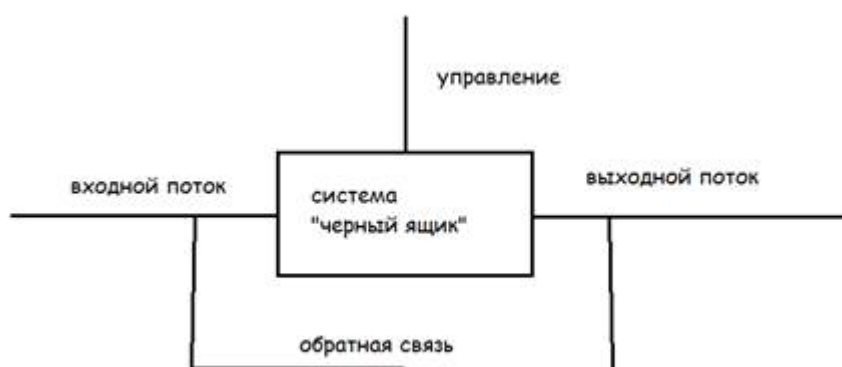


Рис. 1 Система «черный ящик»

Система «черного ящика» включает в себя следующие элементы:

**Вход.** На вход поступает поток посетителей системы. В отличие от традиционных экономических объектов, где есть строго регламентированное расписание работы, время работы систем электронного бизнеса неограниченно, также неограниченна интенсивность входящего потока. Поэтому можно говорить о том, что входящий поток посетителей равномерно распределен во времени.

- **Выход.** Выходной поток можно описать такими показателями как: среднее число посетителей, сделавших покупку или получивших услугу, средняя цена

покупки, среднее время нахождения посетителя в системе и т.д.

- Обратная связь. Обратная связь в системе может оказывать как положительный так и отрицательный эффект. Положительная обратная связь позволяет увеличивать объем продаж в системе, в то же время отрицательная обратная связь сигнализирует о неэффективности работы системы и снижении посетителей.

Управляющие воздействия. В теории управления изменение состояния объекта управления происходит за счет управляющих воздействий. В системе электронного управления воздействия можно разделить на четыре группы:

1. Технические. К ним относятся мощность сервера, на с которым взаимосвязана система электронного бизнеса, устойчивость технических средств к перегрузкам и внешним воздействиям, размер сайта и другие
2. маркетинговые: это структура сайта, способы навигации по сайту, возможность быстрого поиска информации на сайте, привлекательность сайта.
3. организационные – способность менеджеров быстро реагировать на запросы потребителей

Таким образом, анализируя элементы системы и выбирая управляющие воздействия можно сформировать эффективный режим функционирования.

Следующей особенностью экономико-математического моделирования систем электронного бизнеса является специфичность наблюдений и измерений. Точность и полнота первичной информации, возможность ее сбора и обработки определяют выбор прикладных моделей.

Информация в системах электронного бизнеса обладает большой размерностью, высокой степенью динамичности и неопределенности. Извлечение и обработка требуемой информации, как правило, представляет собой наиболее сложный и трудоемкий этап моделирования, поэтому в последнее время получил распространение информационный подход к моделированию, суть которого заключается в том, в соответствии с имеющейся информацией подбирается экономико-математическая модель, то есть информация становится определяющим фактором при построении экономико-математической модели.

Отметим еще ряд специфических проблем, которые присущи экономическим процессам. В экономике многие процессы являются массовыми; они характеризуются закономерностями, которые не обнаруживаются на основании лишь одного или нескольких наблюдений. Поэтому моделирование в экономике должно опираться на массовые наблюдения.

Другая проблема порождается динамичностью экономических процессов, изменчивостью их параметров и структурных отношений. В электронной экономике происходит экспоненциальный рост числа потребителей и пользователей Интернет. Вследствие этого, для моделирования систем электронного бизнеса процессы, происходящие в системе необходимо постоянно держать под наблюдением, необходимо иметь устойчивый поток новых данных. Кроме этого, при построении математических моделей в области электронного бизнеса требуется корректировать исходную информацию с учетом ее запаздывания.

Экономико-математические модели должны отвечать экономическим законам. В экономике электронного бизнеса существуют свои специфические закономерности, которые необходимо учитывать при моделировании. Например, принцип обратного ценообразования утверждает, что улучшение модификации и качества товара ведет к снижению его цены в отличие от

традиционной экономики, в которой модификация товара увеличивает его цену. Более того, в соответствии с данным принципом наиболее ценные услуги в Интернет предоставляются бесплатно. Это позволяет продавать дополнительные, связанные с ними продукты. Подобная специфика требует разработки новых подходов и моделей для систем электронного бизнеса.

**Вопросы:** Понятие системы; Классификация систем, структура системы; структурное многообразие системы; Сложные системы Свойства сложных систем Кибернетический подход к анализу сложных систем. Понятие «черного ящика» Понятие управления; прямые и обратные связи; Принципы кибернетического управления Устойчивость системы. Виды устойчивости Понятие динамической системы. Структура динамических систем.

## 2 Системный подход к моделированию электронного бизнеса

### Понятие системы

Понятие системы; сложность и разнообразие системы; структура системы; структурное многообразие системы; качество эмерджентности системы; микро- и макро- подходы к исследованию иерархической организации систем.

Понятие управления; прямые и обратные связи; принцип необходимого разнообразия Эшби; управление сложной динамической системой; этапы управления; оценка качества управления; принципы и функции управления; методы управления; принцип оптимального управления в экономических системах.

Под системой обычно понимается совокупность объектов, элементов или составляющих произвольного характера, образующих в некотором смысле определенную целостность.

Структура системы:

Структура системы - это устойчивая во времени совокупность взаимосвязей между ее компонентами (подсистемами). И при системном подходе важным этапом является определение структуры изучаемой, описываемой системы. Это связано с тем, что грамотное выделение подсистем способствует упрощению процедур исследования и анализа результатов.

Структура является статической моделью системы и характеризует только строение системы, не учитывая множества свойств (состояний) её элементов.

определение структуры системы

пусть система определена как  $\{X, Q\}$ , где  $X$  - множество её переменных и  $Q$  - множество отношений  $Q$  эквивалентным единственным отношениям  $g(X_1, \dots, X_n)$ , где  $\{X_1, X_n\} = X \Rightarrow$  тогда система представляет собой поле  $X$  упорядочив значение  $g$ .  $\Rightarrow$  будем считать, что две системы имеют одинаковую структуру, если одинаковую структуру имеют соответствующие ей поля  $X$ .

Структура системы может изменяться.

Структуры могут быть представлены в матричной форме, в форме теоретико-множественных описаний, с помощью языка топологии, алгебры и других средств моделирования систем.

Структуры, особенно иерархические, могут помочь в раскрытии неопределённости

сложных систем. Иными словами, структурные представления систем могут являться средством их исследования. В связи с этим полезно выделить и исследовать определённые виды (классы) структур.

### **Виды структур**

**Сетевая структура**, или сеть, представляет собой декомпозицию системы во времени. Такие структуры могут отображать порядок действия технической системы (телефонная сеть, электрическая сеть и т.п.), этапы деятельности человека (при производстве продукции – сетевой график, при проектировании – сетевая модель, при планировании – сетевой план и т.д.). В виде сетевых моделей представляются методички системного анализа.

**Иерархические структуры** представляют собой декомпозицию системы в пространстве. Все компоненты (вершины, узлы) и связи (дуги, соединения узлов) существуют в этих структурах одновременно (не разнесены во времени). Такие структуры могут иметь не два, а большее число уровней декомпозиции (структуризации).

### **Классификация систем**

Классификации всегда относительны. Цель любой классификации – ограничить выбор подходов к отображению системы, сопоставить выделенным классам приёмы и методы системного анализа и дать рекомендации по выбору методов для соответствующего класса систем.

Для выделения классов систем могут использоваться различные классификационные признаки. Основными из них считаются: природа элементов, происхождение, длительность существования, изменчивость свойств, степень сложности, отношение к среде, реакция на возмущающие воздействия, характер поведения и степень участия людей в реализации управляющих воздействий.

**По природе элементов** системы делятся на реальные и абстрактные.

**В зависимости от происхождения** выделяют естественные и искусственные системы.

**По длительности существования** системы подразделяются на постоянные и временные.

**В зависимости от степени изменчивости** свойств системы делятся на статические и динамические.

**В зависимости от степени сложности** системы делятся на простые, сложные и большие.

**По степени связи с внешней средой** системы делятся на изолированные, закрытые, открытые равновесные и открытые диссипативные.

**В зависимости от реакции на возмущающие воздействия** выделяют активные и пассивные системы.

**По характеру поведения** все системы подразделяются на системы с управлением и без управления.

**В зависимости от степени участия человека в реализации управляющих воздействий** системы подразделяются на технические, человеко-машинные, организационные.

виды связей между элементами системы:

Вещественные связи представляют каналы, по которым элементы системы или системы в целом обмениваются между собой теми или иными веществами. В производственно-

экономических системах – это каналы, по которым осуществляется снабжение сырьем, полуфабрикатами, заготовка и отгрузка готовой продукции.

*Энергетические* – представляют каналы обмена различными видами энергии: механической, тепловой, световой, электрической и др. Это – системы рычагов и трансмиссий, теплопроводы, световоды, сети электроснабжения.

*Информационные* – передают сигналы управления. очевидно существование информационных связей в животном мире, в человеческом обществе. В технических системах, используемых в информационной сфере (радио, телевидение, компьютерные сети), также действуют связи информационного типа. В них информация – это семантическое содержание физических сигналов, передаваемых между частями системы.

### **Сложная система**

Сложная система – составной объект, части которого можно рассматривать как системы, закономерно объединенные в единое целое в соответствии с определенными принципами или связанными между собой заданными отношениями. Сложную систему можно расчленить (не обязательно единственным образом) на конечное число частей, называемое подсистемами; каждую такую подсистему (высшего уровня) можно в свою очередь расчленить на конечное число более мелких подсистем и т. д., вплоть до получения подсистем первого уровня, т. е. элементов сложной системы, которые либо объективно не подлежат расчленению на части, либо относительно их дальнейшей неделимости имеется соответствующая договоренность.

### **Свойства сложных систем**

Многоуровневость (часть системы сама является системой. Вся система, в свою очередь, является частью более крупной системы)

Наличие внешней среды

Динамичность (в системах нет ничего неизменного. Все константы и статические состояния – это только абстракции, справедливые в ограниченных пределах);

Устойчивость и старение (устойчивость системы – это ее способность компенсировать внешние или внутренние воздействия, направленные на разрушение или быстрое изменение системы. Старение – это ухудшение эффективности и постепенное разрушение системы за длительный период времени.

Целостность (система имеет целостность, которая есть самостоятельная новая сущность. Эта сущность само организуется, влияет на части системы и на связи между ними, заменяет их для сохранения себя как целостности, ориентируется во внешней среде и т.д.)

Полиструктурность – это наличие у одной и той же системы большого количества структур. Рассматривая систему с разных точек зрения, мы будем выявлять в ней разные структуры.

### **Кибернетический подход к анализу сложных систем. Понятие "чёрного ящика"**

**Кибернетика** – наука об общих закономерностях процессов управления, осуществляемых сложными динамическими системами. Её основателем является американский математик Н. Винер (1894-1964), выпустивший в 1948 году книгу "Кибернетика, или управление их связь в животном и машине".

К основным задачам кибернетики относятся:

1) установление фактов, общих для управляемых систем или для некоторых их

совокупностей;

2) выявление ограничений, свойственных управляемым системам. и установление их происхождения;

3) нахождение общих законов, которым подчиняются управляемые системы;

4) определение путей практического использования установленных фактов и найденных закономерностей.

Кибернетическая система - целенаправленная система, в отношении которой принято допущение об относительной изолированности в информационном отношении и абсолютной проницаемости в материально энергетическом отношении. Логистическая система как целенаправленная, динамическая, является управляемой, в этом смысле относится к категории кибернетических систем.

Кибернетический подход - исследование системы на основе кибернетических принципов, в частности с помощью выявления прямых и обратных связей, рассмотрение элементов системы как некоторых «черных ящиков».

Системы, которые изучает кибернетика - это множество элементов, соединенных между собой цепью причинно- следственной зависимости. Такое соединение между элементами носит название «связь».

Основные особенности кибернетики как самостоятельной научной области состоят в следующем:

- Кибернетика способствовала формированию информационной концепции представления систем.
- Кибернетика рассматривает системы только в динамике.
- Кибернетика практикует вероятностные методы исследования поведения сложных систем.
- В кибернетике применяется метод исследования систем с использованием понятия «черный ящик», под которым понимается система, в которой исследователю доступна лишь входная и выходная информация этой системы, а внутреннее устройство может быть неизвестно.

Очень важным методом кибернетики, использующим понятие «черного ящика», является метод моделирования.

Чёрный ящик — термин, используемый для обозначения [системы](#), внутреннее устройство и механизм работы которой очень сложны, неизвестны или неважны в рамках данной задачи. «Метод чёрного ящика» — метод исследования таких систем, когда вместо свойств и взаимосвязей составных частей системы, изучается реакция системы, как целого, на изменяющиеся условия. Подход чёрного ящика сформировался в точных науках (в [кибернетике](#), [системотехнике](#) и физике) в 20-40 годах XX века и был заимствован другими науками

Система, которую представляют как «черный ящик», рассматривается как имеющая некий «вход» для ввода информации и «выход» для отображения результатов работы, при этом происходящие в ходе работы системы процессы наблюдателю неизвестны. Предполагается, что состояние выходов функционально зависит от состояния входов.

*Каноническое представление* чёрного ящика — это полное описание его функций. Два



черных ящика с одинаковыми каноническими представлениями считаются эквивалентными.

Изучение системы по методу чёрного ящика сводится к наблюдениям за ней и проведению экспериментов по изменению входных данных, при этом в ходе наблюдения над реакциями системы на внешние воздействия достигается определённый уровень знаний об исследуемом объекте, позволяющий осуществлять прогнозирование поведения «чёрного ящика» при любых заданных условиях.

Предложенный в кибернетическом подходе способ представления моделей опирается, так же как и в системном анализе, на известное положение, что всем объектам производственно коммерческой деятельности присуще движение, изменение, процессы. Отсюда и так называемый процессный способ кибернетического отражения систем. Согласно этому способу первым и основным элементом всякой системы (или ее модели) выступает *процесс*, в котором оптимально преобразуются потоки ресурсов. Поэтому процессный способ представления систем можно также назвать оптимально потоковым.

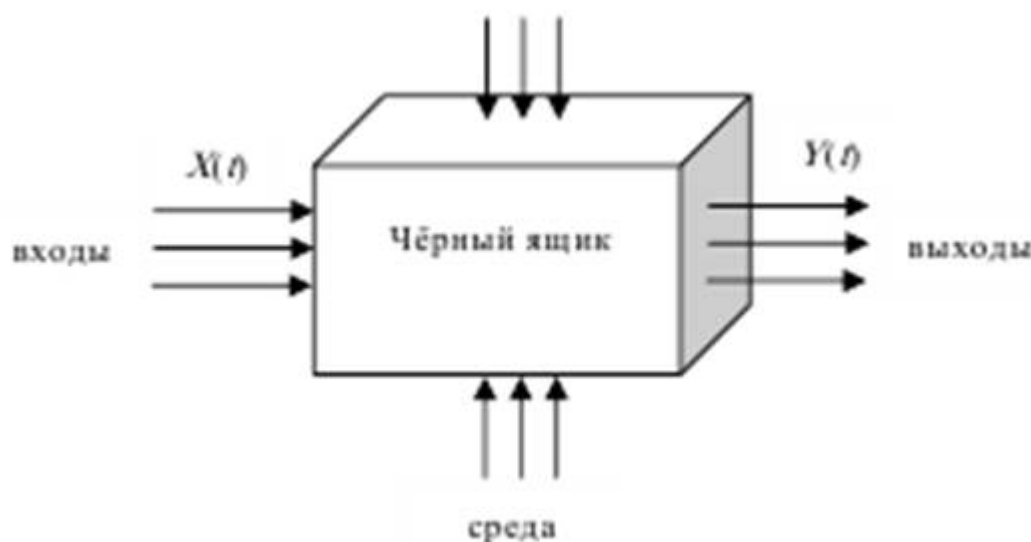
Вторым элементом кибернетической потоковой модели является *вход*. Он как раз и представляет собой поток потребляемых в процессе ресурсов. Например, для организационно-технологической части системы - это оборудование, рабочая система, сырьё и так далее, для информационной - выходная информация, технические средства для ее обработки. Можно также сказать, что входом называется все то, что изменяется при протекании процессов.

Третий элемент кибернетической модели - *выход*. Это результат самого преобразования входов, то есть поток созданных или отработанных ресурсов. В логистических системах выходами могут быть готовая продукция, отходы производства, высвобождаемое оборудование, выходная информация и т.д. Совокупность связей между элементами системы обеспечивает их совместное функционирование потоки между элементами (звеньями) одной системы или между системами. Если связь осуществляет передачу выходного воздействия одного элемента на вход какого - либо последующего элемента той же системы, то она носит название *прямой* связи.

Четвертый элемент кибернетической модели - *обратная связь*. Это связь между выходом какого либо элемента и входом предшествующего ему в той же системе элемента. Она выполняет целый ряд операций по корректированию элементов системы. Различают положительную и отрицательную обратные связи. Положительная обратная связь возвращает на вход часть сигнала, полученного на выходе элемента или системы. Положительная обратная связь не корректирует сигнал на входе, а только увеличивает его значение.

При отрицательной обратной связи полученный по ней сигнал может и не совпадать по знаку с первоначальным. Это дает возможность сопоставить полученный результат с намеченной целью и в случае необходимости откорректировать поведение элемента или системы в целом. На практике важна своевременность такой корректировки, чтобы избежать значительного отклонения системы от траектории движения к намеченной цели. Принцип обратной связи лежит в основе логистического управления производственно коммерческой деятельностью, он характеризует способность системы воспринимать и использовать информацию о результатах собственной деятельности для достижения цели наилучшим (оптимальным) образом и в кратчайшие сроки.

Пятый и последний элемент кибернетической модели - *ограничения*, которые состоят из целей системы и так называемых принуждающих связей. Для производственно коммерческих систем одной из целей является выпуск продукции заданных номенклатуры, объема и качества, себестоимости; для информационной части системы - получение требуемой информации. В качестве принуждающих связей в этих случаях могут выступать различные лимиты ресурсов, метод переработки информации, технические характеристики средств для его реализации и т.д.



Управлением, связями и переработкой информации занимается наука кибернетика. Ее основателем считается американский математик Н.Винер, который опубликовал труд «Кибернетика, или управление и связь в живых организмах и машинах». Кибернетика изучает общие свойства различных систем управления вне зависимости от их материальной основы. Эти свойства имеют место в живой природе, технике и в коллективах людей.

Любая система подвергается процессу управления.

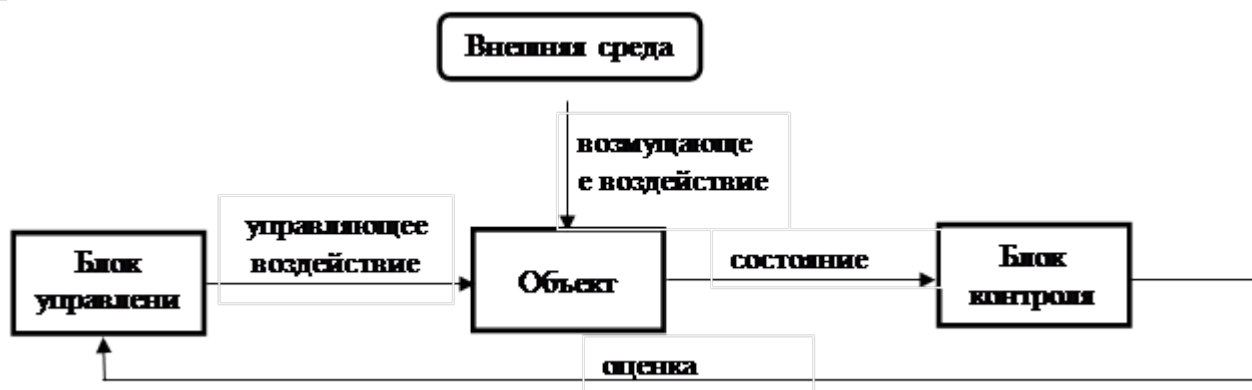
Управление - это целенаправленное воздействие на объект (управляемый процесс), приводящее к заданному изменению (или поддержанию) его состояния. У управляемых систем всегда существует некоторое множество возможных изменений, из которого производится выбор предпочтительного изменения. Если у системы нет выбора, то не может быть и речи об управлении.

Управлять - это и предвидеть те изменения, которые произойдут в системе после подачи управляющего воздействия (сигнала, несущего информацию).

Всякая система управления рассматривается как единство управляющей системы (субъекта управления) и управляемой системы - объекта управления, а также линии связи (каналы связи) между ними. Управление системой или объектом всегда происходит в какой-то внешней среде. Поведение любой управляемой системы всегда изучается с учетом ее связей с окружающей средой. Поскольку все объекты, явления и процессы взаимосвязаны и влияют друг на друга, то, выделяя какой-либо объект, необходимо учитывать влияние среды на этот объект и наоборот. Свойством управляемости может обладать не любая система. Необходимым условием наличия

в системе хотя бы потенциальных возможностей управления является ее организованность.

**Система управления** – комплекс взаимосвязанных элементов, участвующих в процессе управления.



Чтобы управление могло функционировать, то есть целенаправленно изменять объект, оно должно содержать четыре необходимых элемента:

1. Каналы сбора информации о состоянии среды и объекта.
2. Канал воздействия на объект.
3. Цель управления.
4. Способ (алгоритм, правило) управления, указывающий, каким образом можно достичь поставленной цели, располагая информацией о состоянии среды и объекта.

#### **Виды воздействий:**

- возмущающие (те, на которые мы не влияем)
- целенаправленные

#### **Требования к моделям систем:**

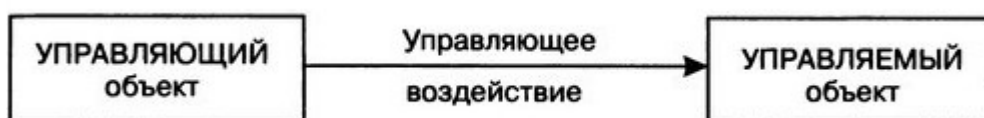
1. адекватность модели (должна удовлетворять основным эк. законам)
2. понятность модели
3. целенаправленность
4. функциональная полнота с т.з. решения поставленных задач
5. адаптивность (позволяет легко обновлять данные, допускать постепенные изменения)

Существует два основных вида связи:

- Прямые
- Обратные

Различие между ними состоит в том, что прямая обеспечивает передачу воздействия или информации с выхода одного элемента на вход другого, а обратная с выхода некоторого элемента на вход того же элемента.

#### **Модель управления с прямой связью.**



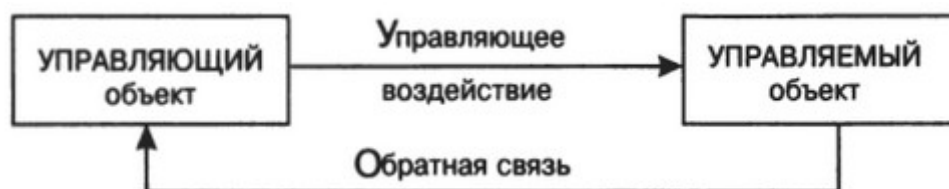
Прямые связи – это связи, идущие от управляющей к управляемой подсистеме. Это командные связи. Они отражают степень воздействия субъекта управления на объект управления или системы на среду.

### Модель управления с обратной связью.

Более распространенными и эффективными являются системы управления с обратной связью - замкнутые системы управления. Управляющий орган при этом перерабатывает информацию, полученную как извне от других объектов системы, так и от объекта управления по линии обратной связи.

Обратные связи - это связи идущие от объекта к субъекту управления или от среды к системе. Они показывают разницу между ожидаемым и действительным результатом воздействия (положительные и отрицательные связи). Различают положительную и отрицательную обратную связь. При положительной обратной связи результаты процесса стремятся усилить его. В технических устройствах положительная обратная связь способствует переходу системы в другое равновесное состояние или вызывает лавинный процесс. Отрицательная обратная связь препятствует развитию, изменению процесса и стабилизирует его. Отрицательная обратная связь используется в замкнутых системах управления.

Управлению с обратной связью соответствует схема, изображенная на рисунке ниже:



### Принципы кибернетического управления

Для выяснения сущности управления и для рассмотрения проблем его организации и эффективности важное значение имеет установление связи между теорией управления и кибернетикой.

Появление **кибернетики - науки об общих закономерностях в процессах управления, осуществляемых в живых существах, машинах и их комплексах**, - позволило собрать и обобщить огромное количество фактов, которые показали, что процесс управления во всех организованных системах сходен. Различие в управлении объектами касаются критериев цели, задач и содержания управления. Однако структура и построение процессов управления в организованных системах любых рангов имеют черты глубокого сходства, общности. Это обстоятельство объясняется тем, что **процесс управления всегда представляет собой информационный процесс**.

**Отличительная черта кибернетического подхода** к познанию и совершенствованию процессов управления - использование их аналогов в живой и неживой природе и моделирование. **Основная задача кибернетики** - достижение на основе присущих ей методов и средств оптимального уровня управления, т. е. принятие наилучших управленческих решений. Таким образом, **кибернетическим** называется такое управление, которое:

рассматривает организацию как некоторую большую систему, каждый элемент которой берется не только сам по себе, но и как часть большой совокупности, в которую он входит;

обеспечивает оптимальное решение многовариантных динамических задач организации; использует специфические методы, выдвинутые кибернетикой (обратную связь,

саморегулирование и самоорганизацию и т. п. ); широко применяет механизацию и автоматизацию управленческих работ на основе использования вычислительной и управляющей техники и компьютерных технологий.

Из кибернетики управление заимствует следующие законы и принципы:

- **Закон необходимого разнообразия.** По определению У. Р. Эшби, первый фундаментальный закон кибернетики заключается в том, что *Разнообразие сложной системы требует управления, которое само обладает некоторым разнообразием.* Иначе говоря, значительное разнообразие воздействующих на большую и сложную систему возмущений требует адекватного им разнообразия её возможных состояний. Если же такая адекватность в системе отсутствует, то это является следствием нарушения принципа целостности составляющих её частей (подсистем), а именно - недостаточного разнообразия элементов в организационном построении (структуре) частей.

С позиции теории управления главнейшим моментом, характеризующим сложность системы, является её разнообразие. *Поэтому определение степени оптимального разнообразия при разработке любых систем - организации производства, планирования, обслуживания, оперативного управления, систем оплаты труда и т. д. - является одним из наиболее важных и первоочередных этапов использования кибернетики при проектировании и функционировании организации.*

- **Принцип эмерджентности.** Второй принцип У. Э. Эшби, выражает следующее важное свойство сложной системы: *"Чем больше система и чем больше различия в размерах между частью и целым, тем выше вероятность того, что свойства целого могут сильно отличаться от свойств частей"*. Указанные различия возникают в результате объединения в структуре системы (частей) определенного числа однородных или разнородных частей (элементов). Этот принцип указывает на возможность несовпадения локальных целей (частных целей отдельных элементов системы) с глобальной (общей) целью системы, а отсюда - на необходимость для достижения глобальных результатов принимать решения и вести разработки по совершенствованию системы и её частей на основе не только анализа, но и синтеза.

- **Принцип внешнего дополнения.** Впервые сформулированный С. Т. Биром третий принцип кибернетики гласит: *любая система управления нуждается в "черном ящике" - определенных резервах, с помощью которых компенсируются неучтенные воздействия внешней и внутренней среды.* Степень реализации этого принципа и определяет качество функционирования управляющей подсистемы. Неучтенные факторы могут резко снизить надежность функционирования систем. Для удержания системы в заданных пороговых значениях переменных (показателей) необходимо наделить её нормативным уровнем резервов (стратегических, тактических, оперативных, технических, технологических, организационных, экономических и управленческих), компенсирующих воздействие этих факторов.

- **Закон обратной связи.** Четвертый принцип кибернетики возведен в ранг фундаментального закона, который известен как закон обратной связи. *Без наличия обратной связи между взаимосвязанными и взаимодействующими элементами, частями или системами невозможна организация эффективного управления ими на научных принципах.*

Схема управления с обратной связью (простая замкнутая система)



Все организованные системы являются открытыми, и замкнутость их обеспечивается только через контур прямой и обратной связи. Необходимым условием их эффективного функционирования является наличие обратной связи, сигнализирующей о достигнутом результате. На основании этой информации корректируется управляющее воздействие. Закон обратной связи подчеркивает, что управление немислимо без наличия как прямой, так и обратной связи между объектом и субъектом управления, образующими замкнутый контур. Применительно к планированию этот закон утверждает единство плана и отчета. Кто порождает план, тот организует учет, анализ и контроль его исполнения объектом управления.

**- Принцип выбора решения.** Решение должно приниматься на основе выбора одного из нескольких вариантов. Там, где принятие решения\* строится на анализе одного варианта, имеется субъективное управление. Разработка же многовариантных реакций в ответ на конкретную ситуацию, привлечение коллективного разума для разработки вариантов решений, в том числе с использованием метода "мозговой атаки", безусловно обеспечит принятие оптимального решения для конкретного случая. Этот принцип учитывает взаимосвязанность и обусловленность количественных и качественных изменений.

**- Принцип декомпозиции.** Этот принцип указывает на то, что управляемый объект всегда можно рассматривать как состоящий из относительно независимых друг от друга подсистем (частей). Искусство управления заключается в отборе взаимосвязанных факторов, в расчленении решаемой задачи на ряд последовательных звеньев.

**- Принципы иерархии управления и автоматического регулирования.** Под иерархией понимается многоуровневое управление, характерное для всех организованных систем. Обычно нижние ярусы управления отличаются высокой скоростью реакции, быстротой переработки поступивших сигналов. На этом уровне происходит оперативное принятие решения. Чем менее разнообразны сигналы, тем быстрее реакция - ответ на информацию. По мере повышения уровня иерархии действия становятся более медленными, но отличаются большим разнообразием. Осуществляются они уже не в темпе воздействия, а могут включать в себя анализ, сопоставление, разработку различных вариантов реакции (ответ на информацию).

Все указанные законы и принципы кибернетики взаимосвязаны и взаимообусловлены. Они должны непременно учитываться при организации структуры как объекта, так и субъекта управления, а в равной мере при реализации временного аспекта их организации, т. е. при осуществлении процессов планирования и управления.

### **3 Динамические модели в экономике**

#### **Определение устойчивости. Виды устойчивости.**

*Под устойчивостью, или стабильностью, системы в широком смысле понимается свойство системы возвращаться в некоторое установившееся состояние или режим после нарушения последнего какими-либо внешними или внутренними факторами.*

Основным содержанием теории устойчивости является исследование влияния возмущающих воздействий на поведение системы. При этом под возмущающими факторами понимаются силы, обычно неизвестные заранее, которые как вследствие своей неопределенности, так и вследствие относительной малости по сравнению с основными силами, не учитываются при описании движения системы.

Система может иметь и несколько состояний устойчивого и неустойчивого равновесия.

Относительно некоторого возмущения, действующего на систему, ее состояние равновесия (или цикл) может характеризоваться несколькими типами устойчивости. Если система возвращается в состояние равновесия или цикличности при любых возможных воздействиях на нее (при любых возмущениях), то равновесие называют *абсолютно устойчивым*. Если система при возмущениях возвратится в состояние равновесия только из некоторой области, то равновесие называют *устойчивым относительно этой области*. Наконец, если после воздействия на систему она сохраняет новое состояние, вызванное этим воздействием, то систему называют *безразлично устойчивой*. Во всех остальных случаях, кроме перечисленных выше, система является *неустойчивой*.

Существует также понятие *асимптотической устойчивости*, под которой понимается *устойчивость с неограниченным приближением во времени возмущенного движения к невозмущенному*.

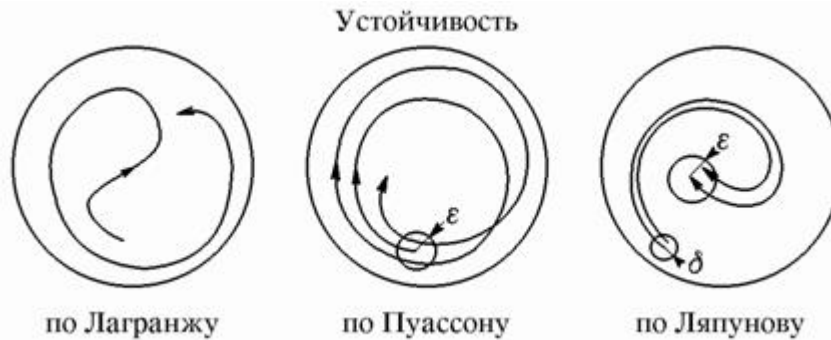
Устойчивость поведения систем, как правило, является положительным свойством, обеспечивающим их нормальное целенаправленное функционирование и сохранение целостности в экстремальных условиях. Однако в ряде случаев устойчивость отражает инерционность, косность систем, ограничивающую возможность управления ими.

*Устойчивость представляет собой одно из проявлений эмерджентности систем. Устойчивость является свойством всей системы в целом, а не какой-либо ее отдельной части. Система состоящая из нескольких устойчивых подсистем, может оказаться неустойчивой, и наоборот, при объединении некоторого количества неустойчивых подсистем может возникнуть устойчивая система (в зависимости от способа такого объединения).*

#### **Устойчивость по Ляпунову (1 вариант)**

Понятие устойчивости по Ляпунову характеризует траекторию с точки зрения поведения соседних траекторий, располагающихся в ее окрестности. Предположим, что система при старте из начальной точки  $X$  порождает траекторию  $X(t)$ . Рассмотрим другую траекторию той же системы  $Y(t)$ , стартовая точка которой близка к  $X$ . Если обе траектории остаются близкими в любой последующий момент времени, то траектория  $X(t)$  называется устойчивой по Ляпунову.

Наглядная иллюстрация устойчивости по Лагранжу, Пуассону и Ляпунову приводится на рис. Когда говорят просто об устойчивой траектории, то всегда имеется в виду устойчивость по Ляпунову.



### Определение устойчивости по М. Я. Ляпунову

Невозмущенное движение (при  $\Delta x_i \infty = 0$ ) называется устойчивым по отношению к переменным  $x_i$ , если при всяком заданном положительном числе  $A_2$ , как бы мало оно ни было, можно выбрать другое положительное число  $\lambda_2(A_2)$  так, что для всех возмущений  $\Delta x_i \neq 0$ , удовлетворяющих условию:

$$i=0n \sum (\mu_i^2 (\Delta x_i)^2) \leq \lambda_2,$$

возмущенное движение будет для времени  $t \geq T$  удовлетворять неравенству:

$$i=0n \sum (\mu_i^2 (\Delta x_i)^2) \leq A_2,$$

где:  $\mu_i$  – коэффициенты, уравнивающие размерности величин  $\Delta x_i$ .

Если с течением времени  $\lim \Delta x_i \rightarrow 0$ , то система асимптотически устойчива.

### Особенности определения устойчивости по Ляпунову.

1. Возмущения накладываются только на начальные условия, что физически говорит о том, что возмущенное движение происходит при тех же источниках энергии, что и невозмущенное.
2. Устойчивость рассматривается на бесконечно большом интервале времени.
3. Возмущения предполагаются малыми.

Тем не менее, методы развитые Ляпуновым лежат в основе исследования других видов устойчивости движения.

Если сколь угодно малые изменения начальных данных могут сильно изменять решение, то это соответствует неустойчивому состоянию системы. Задача определения устойчивости объекта, сводится к нахождению условий, при которых достаточно малое изменение начальных данных приводит к сколь угодно малому изменению решения.

По определению, предложенному Ляпуновым, решение  $y^*i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) устойчиво, если в любой заданной области  $\epsilon$  допустимых отклонений от состояния равновесия можно подобрать такую область начальных условий  $d$ , включающую состояние равновесия, что траектория любого движения, начавшегося внутри  $d$ , никогда не достигнет границ области  $\epsilon$ .

Существует также понятие **асимптотической устойчивости**, под которой понимается устойчивость с неограниченным приближением во времени возмущенного движения к невозмущенному. Таким образом, если устойчивое решение  $y^*i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) при  $t \rightarrow \infty$



удовлетворяет условию  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i^*(t) - y_i(t)| = 0$  для всякого решения  $y_i(t)$ , то имеет место *асимптотическая устойчивость*.

### **Понятие динамической системы. Структура динамических систем.**

Элементы теории динамических систем

- Основные понятия теории динамических систем
- Регулярная и хаотическая динамика
- Характеристики динамического хаоса

Динамическая система – любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния, как совокупности некоторых величин в некоторый момент времени, и задан закон, описывающий эволюцию начального состояния с течением времени.

Важнейшим свойством динамических систем является их устойчивость, т.е. сохранение системой своей базовой структуры и основных выполняемых функций в течение определенного времени и при относительно небольших и разнообразных внешних воздействиях и внутренних возмущениях.

Различают абстрактные динамические системы с дискретным временем и системы с непрерывным временем.

В системах с дискретным временем, которые традиционно называются каскадами, поведение системы (или, что то же самое, траектория системы в фазовом пространстве) описывается последовательностью состояний. В системах с непрерывным временем, которые традиционно называются потоками, состояние системы определено для каждого момента времени на вещественной или комплексной оси. Каскады и потоки являются основным предметом рассмотрения в символической и топологической динамике.

Все динамические системы можно разделить на два типа. В системах первого типа (более простых) между вектором входных величин  $X$  и вектором выходных величин  $Y$  существует однозначная функциональная связь. Следовательно, задание вектора входных величин полностью определяет вектор выходных величин.

В системах второго типа (более сложных), к которым можно отнести большинство современных технических кибернетических систем и практически все биологические и экономические системы, имеют место две ступени функциональных связей. Одна из них описывает зависимость внутреннего состояния системы  $Z$  от вектора входных величин  $X$ , другая – зависимость вектора выходных величин  $Y$  от множества внутренних параметров системы (вектора состояния  $Z$ ) и вектора входных величин  $X$ . Таким образом, при исследовании систем второго типа, представляющих для нас наибольший интерес, вместо простой зависимости между входом и выходом  $Y(t) = f[X(t)]$  рассматривается более сложная зависимость

$$Y(t) = f[X(t), Z(t)].$$

подавляющее большинство динамических систем представляют объекты, которые описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений могут успешно применяться и для описания ряда процессов в экономике, в частности, при изучении глобальных проблем дина-

мики развития народного хозяйства для построения так называемых макроэкономических моделей экономики страны, рассматриваемой как одно целое.

Основное содержание теории динамических систем — это исследование кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Сюда входит разбиение фазового пространства на траектории и исследование предельного поведения этих траекторий: поиск и классификация положений равновесия, выделение притягивающих (аттракторы) и отталкивающих (репеллеры) множеств (многообразий). Важнейшие понятия теории динамических систем — устойчивость (способность системы сколь угодно долго оставаться около положения равновесия или на заданном многообразии) и грубость (сохранение свойств при малых изменениях структуры динамической системы; “грубая система — это такая, качественный характер движений которой не меняется при достаточно малом изменении параметров”)

### **Модели Мальтуса и Ферхюльста**

**Модель Мальтуса** описывает размножение популяции со скоростью, пропорциональной ее численности.

Рождаемость характеризует частоту появления новых особей в популяции. Различают рождаемость абсолютную и удельную. Абсолютная рождаемость - число особей, появившихся в популяции за единицу времени. Удельная рождаемость выражается в числе особей на особь в единицу времени

Введем обозначения:

$N(t)$  - численность населения в момент времени  $t$ .

$r$  - скорость прироста

$s$  - скорость убыли

$\Delta t$  - промежуток времени

За некоторый малый промежуток времени  $\Delta t$  в популяции произойдут изменения: часть индивидуумов погибнет или эмигрирует, но появятся новорожденные, а также иммигранты.

Математически это запишется так:

$$N(t + \Delta t) - N(t) = rN(t)\Delta t - sN(t)\Delta t$$

Разделим обе части на  $\Delta t$

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = (r - s) * N(t)$$

Переход к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  приводит к дифференциальному уравнению:

$$\frac{dN}{dt} = (r - s)N$$

Решением уравнения с начальным условием  $N(t_0) = N_0$  будет функция

$$N = N_0 e^{(r-s)t}$$

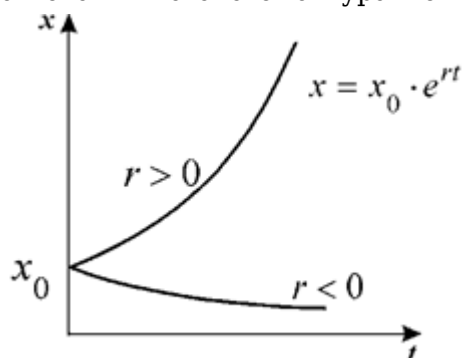
Основные предположения этой задачи:

Коэффициенты  $r$  и  $s$  являются постоянными и не зависят от времени. Это подразумевает, что популяция не ограничивается ни питанием, ни площадью, ни другими популяциями. Кроме того, не учитывается внутренняя структура популяции.

В общем случае скорость прироста и убыли зависят от  $N$  и  $t$ . В популяциях, являющихся

компонентами стабильных экосистем обычно всегда обнаруживается статистически достоверная корреляция между этими величинами. Единственная популяция, для которой данная корреляция положительна - это популяция человека.

Экспоненциальная форма динамики роста численности колонии микроорганизмов в соответствии с системой уравнений уровней выглядит так:



На основании этих выводов Мальтус говорит о необходимости ввести ограничения на рождаемость, в особенности для беднейших слоев общества.

### Модель Ферхюльста

Впервые системный фактор, ограничивающий рост популяции, описал Ферхюльст в уравнении логистического роста.

$$\frac{dN}{dt} = (r - s)N - \gamma N^2$$

$r - s = \varepsilon$  - коэффициент естественного прироста

$\gamma$  - коэффициент «самоотравления»

$$\theta = \frac{\varepsilon}{\gamma}$$

$\theta$  - коэффициент «насыщения»

Это уравнение обладает двумя важными свойствами. При малых  $x$  численность возрастает экспоненциально, при больших - приближается к определенному пределу  $\theta$ . Эта величина, называемая емкостью популяции, определяется ограниченностью пищевых ресурсов, мест для гнездования, многими другими факторами, которые могут быть различными для различных видов.

Уравнение Ферхюльста можно решить аналитически. Ход решения следующий. Произведем разделение переменных:

$$\frac{K dx}{x(K - x)} = r dt$$

Представим левую часть в виде суммы и проинтегрируем

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{K - x}\right) dx = r dt$$

$$\ln x - \ln(K - x) = rt + \ln C$$

Переходя от логарифмов к переменным, получим:

$$\frac{x}{K - x} = Ce^{rt}$$

Здесь  $C$  - произвольная постоянная, которая определяется начальным значением численности  $x_0$ :

$$C = \frac{x_0}{K - x_0}$$

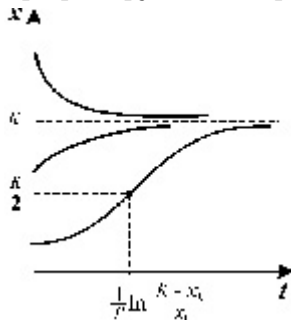
Подставим это значение С в формулу

$$\frac{x}{K - x} = \frac{x_0}{K - x_0} e^{rt}$$

Отсюда получим решение - зависимость численности от времени:

$$x(t) = \frac{x_0 K e^{rt}}{K - x_0 + x_0 e^{rt}}$$

График функции при разных начальных значениях численности популяции.



Если начальное значение  $x_0 < K/2$ , кривая роста имеет точку перегиба. Если  $x_0 > K$ , численность со временем убывает.

Возможны и другие механизмы возникновения колебаний численности (учет возрастной структуры популяции, наличие случайных возмущений и т.д.) процессы.

Уравнение Ферхюльста графически отображается в виде S-образной кривой. Эта кривая называется *логистической кривой*, а рост численности, соответствующий уравнению - *логистическим*. Исследуя кривую, можно сказать, что максимальная скорость роста достигается, когда численность равна  $K/2$ . В некоторый момент численность стабилизируется и остается постоянной величиной.

Популяции, существующие в условиях ограниченных ресурсов, часто хорошо подчиняются правилам логистического роста. Например, когда овцы были завезены в Тасманию, рост их стада описывался логистической кривой. Но правила логистического роста применимы не ко всем случаям. Например, у размножающихся половым путем видов, при слишком малой численности мала вероятность встреч особей разного пола и размножение может вообще прекратиться.

Для реализации модели в среде электронных таблиц уравнение (3) следует представить в дискретном виде

$$N(i+1) = N(i) * r * (1 - N(i)/K)$$

где  $N(i)$  - численность популяции в i-й момент времени;

$r$  - удельная скорость роста популяции (рождаемость/ смертность);

$K$  - емкость среды.

Точным решением уравнения (4) является *логистическая функция*, S-образная кривая.



Существуют две стратегии роста численности популяции:

первая предполагает бурное размножение и короткую продолжительность жизни особей; а вторая стратегия — низкий темп размножения и долгую жизнь.

### Диффузионная модель Басса

Данная модель описывает диффузию новых продуктов, суть которой состоит в следующем:

Пусть существует некоторый рынок, на котором появляется принципиально новый продукт (товар или услуга), не имеющий аналогов и, соответственно, конкуренции со стороны других продуктов. Этот продукт создает новый спрос, т.е. появляется определенное количество людей, желающих приобрести этот продукт или уже совершивших его покупку. Тогда доля покупателей, совершающих акт покупки в момент времени ( $t$ ), описывается формулой:

$$\frac{f(t)}{1-F(t)} = p + q \cdot F(t)$$

, где

$f(t)$

- доля покупателей, совершающих акт покупки в момент времени ( $t$ );

$F(t)$

доля покупателей, купивших продукт до момента времени ( $t$ );

$p$

или коэффициент внешнего влияния;

$q$

- коэффициент имитации или коэффициент

внутреннего влияния.

$$F(T) = \int_0^T f(t) dt$$

Модель предполагает, что рост количества потребителей инновационного продукта объясняется двумя эффектами:

Эффект рекламы (эта категория покупателей называется новаторами) - принимается постоянным и выражается коэффициентом внешнего влияния;

Эффект межличностной коммуникации (эта категория покупателей называется имитаторами) - увеличивается по мере роста количества людей, уже совершивших

покупку (это влияние предполагается пропорциональным (коэффициент внутреннего влияния) этому количеству).

На начальном этапе жизненного цикла продукта преобладает эффект рекламы, так как почти никто не знает о продукте и, соответственно, не может его купить. По мере роста количества потребителей эффективность рекламы снижается, но зато возрастает эффект межличностного общения.

Пусть  $m$  - число потенциальных покупателей продукта (потенциальный спрос), тогда  $mf(t) = n(t)$  - число покупок в момент времени ( $t$ ). Аналогично,  $mF(t) = N(t)$  число человек, уже совершивших покупку.

**Вопросы:** Модели Мальтуса и Ферхюльста Диффузионная модель Басса

## 4 Лине́йные модели оптимального планирования

Принцип оптимальности в экономике и его комплексное выражение. модели разработки производственной программы виртуальных предприятий. определение производственной программы по периодам. модели технико-экономического планирования. модели оптимального использования сырья и материалов. модели оптимального взаимодействия производителей и потребителей. Модели оптимального рекламного бюджета, модели оптимального финансирования. Модель оптимального распределения инвестиций по проектам.

Оценка чувствительной решения задач линейной оптимизации. Двойственные оценки и их применение в экономическом анализе.

### **Принцип оптимальности в экономике и его комплексное выражение.**

Критерий оптимальности (критерий оптимизации) — характерный показатель решения задачи, по значению которого оценивается оптимальность найденного решения, то есть максимальное удовлетворение поставленным требованиям. В одной задаче может быть установлено несколько критериев оптимальности.

**Суть принципа оптимальности** состоит в стремлении выбрать такое планово-управленческое решение  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_j(j=1, \dots, n)$  - его компоненты, которое наилучшим образом учитывало бы внутренние возможности и внешние условия производственной деятельности хозяйствующего субъекта.

## 5 Методы параметрической оптимизации

Параметрическое линейное программирование.

Параметрическое программирование представляет собой один из разделов математического программирования, изучающий задачи, в которых целевая функция или ограничения зависят от одного или нескольких параметров.

Необходимость рассмотрения подобных задач обусловлена различными причинами. Одной из основных является та, что исходные данные для численного решения любой реальной задачи оптимизации в большинстве случаев определяются приближенно или могут изменяться под влиянием каких-то факторов, что может существенно сказаться на оптимальности выбираемой программы (плана) действий. Соответственно, разумно указывать не конкретные

данные, а *диапазон возможного изменения данных*, что-бы в результате решения иметь наилучшие планы для любого варианта исходных данных.

С математической точки зрения параметрическое программирование выступает как одно из средств анализа чувствительности решения к вариации исходных данных, оценки устойчивости решения.

Заметим, что существуют различные подходы к подобному анализу (например, на основе постановки двойственной задачи). Здесь мы, не ссылаясь на двойственные оценки, рассмотрим самые простейшие варианты решения для самых простейших параметрических программ.

С математической точки зрения параметрическое программирование выступает как одно из средств анализа чувствительности решения к вариации исходных данных, оценки устойчивости решения.

**Вопросы:** Принцип оптимальности в экономике и его комплексное выражение. модели разработки производственной программы виртуальных предприятий: постановка задачи и экономико-математическая модель.

## 6 Методы многокритериальной оптимизации

Многокритериальная оптимизация. Постановка задачи. Область компромиссов. Основные проблемы, возникающие при решении задач векторной оптимизации. Классификация методов решения. Методы, использующие ограничения на критерии. Методы, основанные на отыскании компромиссного решения. Методы последовательного применения критериев. Методы целевого программирования. Задачи оптимального функционирования аппаратного и программного обеспечения.

Многокритериальная оптимизация, постановка задачи, область компромиссов, основные проблемы, возникающие при решение задач векторной оптимизации.

Многокритериальные задачи возникают при множественности поставленных целей. В качестве критериев принимают степень достижения каждой цели. Примеры постановки задачи по многокритериальной оптимизации:

Определить необходимое количество ресурса (средств) и рациональный способ его использования. Например: проектирование оборудования для изготовления товара, характеризуемого стоимостью производства (первый критерий) и максимальным сроком службы (второй критерий).

Оценить эффективность сложной экономической системы, функционирующей в различных условиях. В этом случае частным критерием является эффективность системы, работающей при  $i$ -м варианте условия.

Оценить эффективность экономической системы по нескольким показателям. При необходимости принятия решения по инвестиционному проекту его следует оценивать по всем показателям (NPV, IRR, рентабельности и др.)

**Вопросы:** модели оптимального использования сырья и материалов постановка задачи и экономико-математическая модель. модели оптимального взаимодействия производителей и потребителей постановка задачи и экономико-математическая модель. Модель оптимального распределения инвестиций по проектам постановка задачи и экономико-математическая модель. Многокритериальная оптимизация; постановка задачи; область компромиссов;

основные проблемы, возникающие при решении задач векторной оптимизации Метод решения задач многокритериальной оптимизации, использующие ограничения на критерии - метод свёртки критериев Метод решения задач многокритериальной оптимизации, основанные на отыскании компромиссного решения - равных наименьших относительных отклонений Метод решения задач многокритериальной оптимизации последовательного применения критериев метод последовательных уступок Метод решения задач многокритериальной оптимизации целевого программирования понятие и определение полезности по Нейману-Моргенштерну; аксиомы рациональности решений на максимум полезности теорема о существовании функции полезности неймана-моргенштерна склонность, безразличие и несклонность к риску; премия за риск Марковица отношение к склонности к риску в различных ситуациях - коэффициент Эрроу-Пратта Функции покупательского спроса первичных, вторичных потребностей и на предметы роскоши Функции спроса на технологическую продукцию - кривая Гомперца, Перла-Рида, логистическая кривая. Методы линеаризации функций спроса Понятие о биматричных играх. Рационализируемые стратегии в биматричных играх. равновесие по Нэшу. Равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях. Свойства и условия существования равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. Олигополии Курно и Бертрана. Дуополии Курно и Бертрана. Определение кооперативной игры. Платежи в кооперативных играх. Множество дележей. Характеристическая функция кооперативной игры. Коалиции и дележи. ядро игры. Вектор Шепли.

## **7 Математические методы анализа спроса и предложения**

Методы определения потребностей. Эластичность спроса и потребления по цене и доходам. Статические, кинематические и динамические модели спроса. Функции покупательского спроса. Предельный анализ прогнозирование спроса. Структурные модели спроса. Особенности моделей спроса на ИТ-продукцию. Модели оценки потребности в ИТ-ресурсах.

### **Функции покупательского спроса первичных, вторичных потребностей и на предметы роскоши**

Л. Торнквист, предложил специальные виды функции спроса (*функции Торнквиста*) для трех групп товаров: первой необходимости, второй необходимости, предметов роскоши.

Функция Торнквиста для товаров первой необходимости имеет вид:

$$y = \frac{a_1 Z}{Z + c_1}$$

и отражает тот факт, что рост спроса на эти первоочередные товары с ростом дохода постепенно замедляется и имеет предел  $a_1$  (кривая спроса асимптотически приближается к прямой линии  $y=a_1$ ), график функции является вогнутой кривой I.

Функция спроса по Торнквисту на товары второй необходимости выражается формулой :

$$y = \frac{a_2(Z - b_2)}{Z + c_2}, \text{ где } Z \geq b_2$$

Эта функция также имеет предел  $a_2$ , но более высокого уровня; при этом спрос на эту группу товаров появляется лишь после того, как доход достигнет величины  $b_2$ ; график функции - вогнутая кривая II.

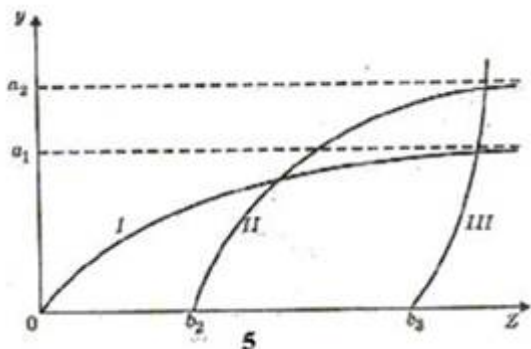
Наконец, функция Торнквиста для предметов роскоши имеет вид :



$$y = \frac{a_2 Z(Z - b_2)}{Z + c_2}, \text{ где } Z \geq b_3$$

Эта функция не имеет предела. Спрос на эти товары возникает только после того, как доход превысит величину  $b_3$ , и далее быстро возрастает, так что график функции - выпуклая кривая III на

Кроме указанных функций, в аналитических моделях покупательского спроса используются также другие функции: степенные, S-образные и т.д.



Использование S-образных кривых в технологическом прогнозировании обусловлено простотой их применения, существующие методы определения параметров кривой позволяют в короткий срок сделать прогноз о развитии технологии. Но, несмотря на обширное использование моделей, можно выделить небольшие минусы. Они исходят из того, что с помощью модели прогнозирования трудно представить, как точно поведет себя в будущем развитие, а прогноз может быть и условным.

S-образная кривая необходима нам непосредственно для прогнозирования. Название этой функции дано по виду кривых, которые представляют ее графики. Функция в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 0,5 + 0,5 \cos\left(\frac{x - b}{b - a} \pi\right), & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \end{cases}$$

где  $a, b$  — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения с условием, что  $a < b$ . График этой функции изображен на рис. 1, при этом значения параметров соответственно равны  $a=3, b=6$ .

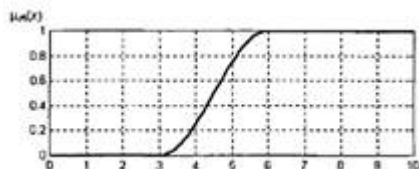


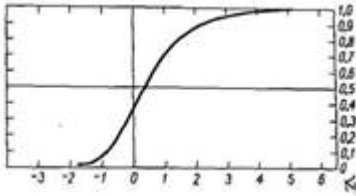
График S-образной функции для параметров  $a=3, b=6$

Самые известные из таких кривых, это кривая Гомперца и логистическая кривая Перла-Рида.

Первая из них, кривая Гомперца, во многих работах исследователей стала эталоном для прогнозирования и получила свое название по фамилии известного математика Бенджамина Гомперца. Функция, задающая эту кривую, имеет вид:

$$y = L e^{-be^{-kt}}$$

Вариант этой функции на графике:



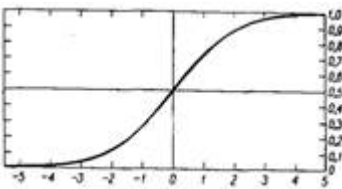
Кривая Гомперца

Кривая Гомперца, у которой  $L$ ,  $b$  и  $k$  равны единице. Рассматривая кривую можно выделить четыре участка, границы между которыми более или менее условны. На первом участке прирост функции незначителен, на втором он постепенно увеличивается, на третьем прирост постоянен и на четвертом происходит замедление темпов, где функция приближается к значению  $K$ . В результате кривая напоминает латинскую букву  $S$ .

Теперь же перейдем к логистической кривой Перла-Рида. Если в модифицированной экспоненте  $y_t = K + ebt$  вместо  $y$  ввести обратную величину, т.е.  $1/y_t$ , получим вторую  $S$ -образную кривую – логистическую кривую

$$1/y_t = K + ebt,$$

Логистическая кривая Перла-Рида:



Логистическую кривую в общем виде записывают:

$$y_t = \frac{K}{1 + be^{f(t)}},$$

где  $e$  – основание натуральных логарифмов;  $f(t)$  – некоторая функция от  $t$  (обычно  $f(t) = -at$ ), тогда,

$$y_t = \frac{K}{1 + be^{-at}}.$$

Если  $b = 1$ , а вместо натуральных логарифмов перейти к десятичным логарифмам и принять условие, что  $f(t) = a + b(t)$ , получим другой вид логистической кривой:

$$y_t = \frac{K}{1 + 10^{a+bt}}.$$

## 8 Элементы теории полезности

Ограниченность решений в условиях неопределенности и риска по критерию максимизации ожидаемой денежной оценки. Понятие и определение полезности по Нейману-Моргенштерну. Аксиомы рациональности решений на максимум полезности. Склонность, безразличие и несклонность к риску. Премия за риск. Отношение к склонности к риску в различных ситуациях. Использование теории полезности по Нейману-Моргенштерну в задачах об оптимальном страховании. Использование теории полезности в задачах выбора оптимальной альтернативы.

## 9 Игровые модели рыночного поведения

Понятие о биматричных играх. Рационализируемые стратегии в биматричных играх. Равновесие по Нэшу. Равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях. Свойства и условия существования равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. Геометрическая интерпретация биматричной игры. Примеры биматричных игр.

Олигополии Курно и Бертрана. Дуополии Курно и Бертрана.

Определение кооперативной игры. Платежи в кооперативных играх. Множество дележей. Способы кооперации игроков. Характеристическая функция игры. Коалиции и дележи. Ядро игры. Вектор Шепли. Оценка влияния политических и экономических организаций.

Использования игровых моделей в задачах ценообразования на электронном рынке.

## 10 Метод анализа иерархий

Иерархическое представление проблемы, шкала отношений и матрицы парных сравнений; собственные векторы и собственные значения матриц. Оценка однородности суждений; синтез приоритетов на иерархии и оценка ее однородности. Учет мнений нескольких экспертов. Методы сравнения объектов относительно стандартов и копированием. Многокритериальный выбор на иерархиях с различным числом и составом альтернатив под критериями. Выбор и прогнозирование наилучшего обеспечения банковского кредита. Функционально-стоимостный анализ промышленной продукции. Рациональное распределение ресурсов между альтернативами. **Аналитическое планирование на основе метода анализа иерархий. Решение задачи выбора интернет-провайдера методом анализа иерархий.**

Метод Анализа Иерархий (МАИ) — математический инструмент системного подхода к сложным проблемам принятия решений. МАИ не предписывает лицу, принимающему решение (ЛПР), какого-либо «правильного» решения, а позволяет ему в интерактивном режиме найти такой вариант (альтернативу), который наилучшим образом согласуется с его пониманием сути проблемы и требованиями к её решению. Этот метод разработан американским математиком Томасом Саати, который написал о нем книги, разработал программные продукты и в течение 20 лет проводит симпозиумы ISAHP (англ. International Symposium on Analytic Hierarchy Process). МАИ широко используется на практике и активно развивается учеными всего мира. В его основе наряду с математикой заложены и психологические аспекты. МАИ позволяет понятным и рациональным образом структурировать сложную проблему принятия решений в виде иерархии, сравнить и выполнить количественную оценку альтернативных вариантов решения. Метод Анализа Иерархий используется во всем мире для принятия решений в разнообразных ситуациях: от управления на межгосударственном уровне до решения отраслевых и частных проблем в бизнесе, промышленности, здравоохранении и образовании. Для компьютерной поддержки МАИ существуют программные продукты, разработанные различными компаниями. Анализ проблемы принятия решений в МАИ начинается с построения иерархической структуры, которая включает цель, критерии, альтернативы и другие рассматриваемые факторы, влияющие на выбор. Эта структура отражает понимание проблемы лицом, принимающим

решение. Каждый элемент иерархии может представлять различные аспекты решаемой задачи, причем во внимание могут быть приняты как материальные, так и нематериальные факторы, измеряемые количественные параметры и качественные характеристики, объективные данные и субъективные экспертные оценки. Иными словами, анализ ситуации выбора решения в МАИ напоминает процедуры и методы аргументации, которые используются на интуитивном уровне. Следующим этапом анализа является определение приоритетов, представляющих относительную важность или предпочтительность элементов построенной иерархической структуры, с помощью процедуры парных сравнений. Безразмерные приоритеты позволяют обоснованно сравнивать разнородные факторы, что является отличительной особенностью МАИ. На заключительном этапе анализа выполняется синтез (линейная свертка) приоритетов на иерархии, в результате которой вычисляются приоритеты альтернативных решений относительно главной цели. Лучшей считается альтернатива с максимальным значением приоритета.

### **Шаги метода анализа иерархий:**

#### **1. Представление исходной проблемы в виде иерархической структуры.**

Цель составляет высший уровень иерархии (уровень 1). На этом уровне может находиться лишь один объект. На следующих вниз уровнях находятся критерии. По системе этих критериев оцениваются сравниваемые объекты (называемые «альтернативами»). Альтернативы располагаются на самом нижнем уровне. В задаче могут присутствовать несколько уровней критериев, но обычно применяют иерархии 3-уровневые (цель - критерии - альтернативы) и 4-х уровневые (цель - комплексные критерии - критерии - альтернативы).



**2. Вынесение экспертных суждений на каждом уровне иерархии по парным сравнениям:** критерии сравниваются попарно по отношению к цели, альтернативы - попарно по отношению к каждому из критериев.

Соответственно заполняются матрицы парных сравнений: одна - для критериев,  $n$  матриц - для альтернатив; здесь  $n$  - количество критериев.

	$K_1$	$K_2$	...	$K_N$	Лок. Пр.
$K_1$	1	8	...	3	
$K_2$	1/8	1	...	1/5	
...	...	...	1	...	...
$K_N$	1/3	5	...	1	

**Операция парного сравнения:** два объекта, находящихся на одном уровне сравниваются по своей относительной значимости для одного объекта высшего уровня. Если критерий имеет определенную числовую меру, например, масса, производительность, цена, то в качестве результата оценки удобно взять отношения соответствующих характеристик (заданных, или рассчитанных) в некоторой шкале отношений. Если критерий не имеет принятой меры, то сравнение в МАИ проводится с использованием специальной «шкалы относительной важности» (другие названия: «шкала 1-9», «шкала Саати»). Эта шкала имеет 9 степеней предпочтения, выбранные с учетом экспериментально установленных психофизиологических особенностей человека, выполняющего сравнение (таб. 3.1.2).

### **Шкала Саати**

<b>Степень предпочтения</b>	<b>Определение</b>	<b>Комментарии</b>
<b>1</b>	<b>Равная предпочтительность</b>	<b>Две альтернативы одинаково предпочтительны с точки зрения цели</b>
<b>2</b>	Слабая степень предпочтения	Промежуточная градация между равным и средним предпочтением
<b>3</b>	<b>Средняя степень предпочтения</b>	<b>Опыт эксперта позволяет считать одну из альтернатив немного предпочтительнее другой</b>
<b>4</b>	Предпочтение выше среднего	Промежуточная градация между средним и умеренно сильным предпочтением
<b>5</b>	<b>Умеренно сильное предпочтение</b>	<b>Опыт эксперта позволяет считать одну из альтернатив явно предпочтительнее другой</b>
<b>6</b>	Сильное предпочтение	Промежуточная градация между умеренно сильным и очень сильным предпочтением
<b>7</b>	<b>Очень сильное(очевидное) предпочтение</b>	<b>Опыт эксперта позволяет считать одну из альтернатив гораздо предпочтительнее другой: доминирование альтернативы подтверждено практикой</b>
<b>8</b>	Очень, очень сильное предпочтение	Промежуточная градация между очень сильным и абсолютным предпочтением
<b>9</b>	<b>Абсолютное предпочтение</b>	<b>Очевидность подавляющей предпочтительности одной альтернативы над другой имеет неоспоримое подтверждение</b>

Числа из этой шкалы используются, чтобы показать, во сколько раз элемент с большей оценкой предпочтительности доминирует элемент с меньшей оценкой относительно общего для них критерия или свойства. В МАИ и МАС доминирование одного объекта над другим бывает а) по предпочтению; б) по важности; в) по вероятности.

При операции парного сравнения используют значения обратных оценок предпочтения: если преимущество *i*-той альтернативы по сравнению с *j*-той имеет одно из приведенных выше значений, то оценка предпочтения *i*-той альтернативы над *j*-той будет иметь обратное значение. То есть в МАИ все матрицы парных сравнений (МПС) являются обратно симметричными.

### **3. Математическая обработка матриц парных сравнений для нахождения локальных и глобальных приоритетов.**

При точном процессе определения вектора локальных приоритетов задача сводится к нахождению собственного вектора матрицы парных сравнений:

$$A \cdot X = \lambda \cdot X,$$

где A - матрица парных сравнений (МПС), X - n-мерный вектор, составленный из искомым приоритетов,  $\lambda$  - собственное значение МПС;

и последующего нормирования этого вектора:

$$\sum x_i = 1.$$

В рассматриваемой задаче искомым является вектор, соответствующий максимальному собственному значению.

Вектор локальных приоритетов может быть приближенно вычислен упрощенным способом:

Для каждой строки матрицы парных сравнений находим среднее геометрическое ее элементов:

$$a_{ij} = (a_{ij}^1 \cdot a_{ij}^2 \cdot \dots \cdot a_{ij}^s)^{\frac{1}{s}}.$$

Находим сумму всех этих средних геометрических.

Делим каждое среднее геометрическое на их сумму («нормировка на единицу»). Результат - вектор локальных приоритетов данной матрицы.

В СППР NooTrop определение вектора локальных приоритетов выполняется путем нахождения собственного вектора матрицы парных сравнений. Это трудоемкая задача (если «вручную»), но в состав практически всех математических пакетов включены средства для нахождения собственных значений и векторов матриц - Eigenvalues, Eigenvectors. При разработке МАИ для СППР была использована библиотека Efficient Java Matrix Library (EJML), что позволяет быстро и эффективно проводить матричные расчеты.

В МАИ есть возможность проверки согласованности экспертных оценок, т.е. чисел в каждой матрице парных сравнений. Для контроля согласованности этих оценок вводятся две связанные характеристики - индекс согласованности (CI) и отношение согласованности (CR):

$$C.I. = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1},$$

$$C.R. = \frac{C.I.}{P_n},$$

где  $P_n$  - это индекс согласованности для положительной обратно симметричной матрицы случайных оценок размера  $n \times n$ ; элементы этой матрицы получены случайным выбором из множества допустимых оценок, т.е. из чисел ряда  $\{1/9, 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

**Таблица 3.1.3 - Значения индекса согласованности**

<b>N</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	-----------

<b>Pn</b>	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49
-----------	---	---	------	------	------	------	------	------	------	------

Допустимым считается отношение согласованности (CR), не превышающее 10 - 20%. Если CR выходит из этих пределов, то экспертам необходимо исследовать задачу и проверить свои оценки.

В результате обработки матриц получаем один вектор локальных приоритетов критериев размерности  $m$  ( $m$  - число критериев) и  $m$  векторов локальных приоритетов альтернатив размерности  $n$  ( $n$  - число альтернатив). Вектор локальных приоритетов критериев показывает их относительную значимость в задаче.

Вектор глобальных приоритетов альтернатив по отношению к цели вычисляется так: каждый компонент этого  $m$ -вектора - это скалярное произведение вектора локальных приоритетов критериев на  $m$ -вектор, составленный из локальных приоритетов альтернативы по данным критериям («профиль альтернативы»).

Профили дают в относительном виде достоинства и недостатки каждой из альтернатив и могут использоваться для определения путей улучшения альтернативы, например, для повышения конкурентоспособности.

Вектор глобальных приоритетов - это и есть решение задачи многокритериального ранжирования. На основании его можно, например, решить задачу выбора: альтернатива с максимальным значением глобального приоритета является лучшей по совокупности критериев с учётом относительной важности последних.

## 11 Экспертные методы принятия решений

Содержание методов экспертных оценок заключается в следующем

I. Создание групп. Для организации проведения экспертных оценок создаются рабочие группы, в функции которых входят проведение опроса, обработка материалов и анализ результатов коллективной экспертной оценки. Рабочая группа назначает экспертов, которые дают ответы на поставленные вопросы, касающиеся перспектив развития данной отрасли. Количество экспертов, привлекаемых для разработки прогноза, может колебаться от 10 до 150 человек, в зависимости от сложности объекта.

II. Формулирование глобальной цели системы. Перед тем, как организовать опрос экспертов, необходимо уточнить основные направления развития объекта, а также составить матрицу, отражающую генеральную цель, подцели и средства их достижения. При этом в ходе предварительного анализа совместно с группой специалистов определяются наиболее важные цели и подцели для решения поставленной задачи. Под средствами достижения цели понимаются направления научных исследований и разработок, результаты которых могут быть использованы для достижения цели. При этом направления научных исследований и разработок не должны пересекаться друг с другом.

III. Разработка анкеты. Заключается в разработке вопросов, которые будут предложены экспертам. Форма вопроса может быть разработана в виде таблиц, но содержание их должно определяться спецификой прогнозируемого объекта или отрасли. При этом вопросы должны

быть составлены по определенной структурно-иерархической схеме, т.е. от широких вопросов к узким, от сложных к простым.

При проведении опроса экспертов необходимо обеспечить однозначность понимания отдельных вопросов, а также независимость суждений экспертов.

IV. Расчёт экспертных оценок. Необходимо провести обработку материалов экспертных оценок, которые характеризуют обобщенное мнение и степень согласованности индивидуальных оценок экспертов. Обработка данных оценок экспертов служит исходным материалом для синтеза прогнозных гипотез и вариантов развития отрасли.

Окончательная количественная оценка определяется с помощью четырех основных методов экспертных оценок и множества их разновидностей:

- 1) метод простой ранжировки (или метод предпочтения);
- 2) метод задания весовых коэффициентов;
- 3) метод парных сравнений;
- 4) метод последовательных сравнений.

## **12 Марковские процессы принятия решений**

Понятие Марковского процесса, классификация Марковских процессов. Дискретные Марковские процессы. Расчёт вероятностей состояний за один, несколько переходов. Эргодические Марковские процессы. Предельные вероятности состояний, поглощающие Марковские процессы. Расчет вероятностей попадания в поглощающие состояния. Использование дискретных Марковских процессов для прогнозирования поведения потребителей электронного бизнеса.

Марковские процессы с доходами. Расчет доходов за один, несколько переходов. Понятие стратегии управления Марковским процессом. Алгоритмы выбора оптимальной стратегии. Задача об оптимальном рекламном бюджете.

Случайный процесс называется марковским, если поведение процесса в будущем зависит только от его поведения в настоящем и не зависит от его поведения в прошлом. Марковские процессы называют также процессами без последствия.

В зависимости от того, дискретными или непрерывными являются множество значений случайного процесса и параметр  $t$ , можно произвести следующую классификацию марковских процессов:

С дискретным множеством значений (дискретными состояниями) состояниями и дискретным временем (цепи Маркова). Примером такого процесса может служить выборочный контроль продукции (состояния: S1- качественная, S2- некачественная;  $t_1, t_2, \dots$ -времена проверки).

С дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывные цепи Маркова). Пример непрерывной цепи Маркова - случай поломки машины (два состояния, но время непрерывно).

С непрерывными состояниями и дискретным временем (Марковские последовательности). Пример - проверка термометра через определенные промежутки времени.

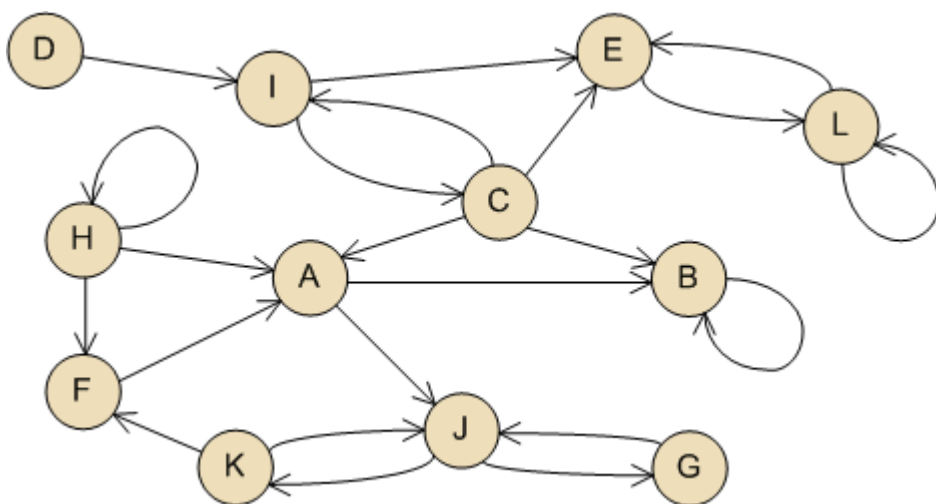
С непрерывными состояниями и непрерывным временем. Примером непрерывного



марковского процесса может служить любая осциллограмма.

Дискретный случайный процесс называется марковским, если для каждого момента времени  $t_0$  вероятность пребывания в любом из состояний в последующий момент времени  $t_1$ ,  $t_1 > t_0$  зависит от того, в каком состоянии процесс находился в момент  $t_0$ , и не зависит от развития процесса до момента  $t_0$ . Дискретные марковские процессы также называют марковскими цепями или цепями Маркова.

В дальнейшем будем рассматривать процессы, в которых время между переходами из состояния в состояние одинаково, поэтому моменты времени будем обозначать  $0, 1, \dots, N$ . Такой случайный процесс можно задать последовательностью состояний  $S(0), S(1), \dots, S(N) \dots$ , где  $S(0)$ -начальное состояние системы,  $S(1)$ - состояние системы в момент времени 1 и т.д. Дискретные марковские процессы удобно иллюстрировать с помощью *графа состояний* (рис. 3.6.1), на котором кружками обозначаются состояния системы, а стрелками - возможные переходы из состояния в состояние. Таким образом, граф переходов показывает, в какие состояния и из каких возможен переход. Дискретный марковский процесс в этом случае превращается в случайное блуждание по графу, которое описывается вероятностями перехода из состояния в состояние.



## Заключение

## Список использованных источников

## Приложения